



TITLE:

変形等置法による複合構造物の解法に関する研究( Dissertation\_全文 )

AUTHOR(S):

平井, 一男

---

CITATION:

平井, 一男. 変形等置法による複合構造物の解法に関する研究. 京都大学, 1965, 工学博士

ISSUE DATE:

1965-09-28

URL:

<https://doi.org/10.14989/doctor.r553>

RIGHT:

変形等置法による複合構造物  
の解法に関する研究

昭和39年10月

平 井 一 男

変形等置法による複合構造物  
の解法に関する研究

昭和39年10月

平 井 一 男

## 目 次

	頁
第 1 篇 総 論	1
緒 論	1
1.1. 各種理論の概観	6
1.1.1. 微分方程式の直接解	7
1.1.2. エネルギー法	8
1.1.3. 集中 Mass の方法	12
1.2. 変形等置法の解析原理	14
1.2.1. 理 論	14
1.2.2. 特 長	20
1.2.3. 適用範囲	29
1.3. 結 語	31
第 2 篇 単位構造物の基礎方程式	34
2.1. 概 説	34
2.2. Modal Analysis による構造物の動的解析	34
(i) 集中荷重が作用する場合	37
(ii) 移動荷重が作用する場合	40
(iii) 分布荷重が作用する場合	42



(iv) モーメント荷重が作用する場合	42
(v) 一定周期力が作用する場合	44
(vi) 減衰を考慮した場合について	45
2.3. 梁の動的レスポンス	46
2.3. (i) 緒言	46
2.3. (ii) 等断面梁の固有振動数と振動モード	47
2.3. (iii) 荷重を受ける梁の運動方程式	49
2.3. (iv) 移動荷重を受ける梁の運動方程式	54
2.3. (v) 数値計算	60
(移動荷重を受ける梁の動的レスポンス)	
2.4. 直交異方性板の運動方程式と動的レスポンス	62
2.4.1. 緒言	62
2.4.2. 四辺単純支持された直交異方性板の運動方程式	63
(i) 集中荷重 $P(t)$ が作用する場合	67
(ii) 集中荷重 $P(t)$ が移動する場合	67
(iii) 分布荷重 $p(x, y, t)$ が作用する場合	67
(iv) モーメント荷重 $M(t)$ が作用する場合	68
(v) 周期力が作用する場合	69
2.4.3. 相対二辺単純支持他の二辺自由なる直交異方性板の運動方程式	70

(i) 振動数方程式	71
(ii) 振動モード	72
(iii) 運動方程式	74
2.4.4 数値計算	75
(i) 固有振動数について	77
(ii) 振動モード( $\Phi_m$ )について	77
(iii) 一定力が一定速度で移動する場合	78
2.5. 本篇の結語	81
第3篇 変形等置法の適用例	86
3.1. 概説	86
3.2. 梁とアーチ(または索)よりなる構造物(ランガー桁・ローゼ桁・吊橋)	87
3.2.1. 緒言	87
3.2.2. 適合条件式	89
3.2.3. 振動数方程式と振動モード	92
3.2.4. 運動方程式	97
3.2.5. 静荷重 $P_0$ が作用する場合の静的撓みと曲げモーメントとの解	99
3.2.6 移動荷重をうける場合の撓みの解	103

3.2.7. アーチと補剛桁との偏心結合による影響	106
3.2.8. 数値計算	114
(i) 橋の諸元について	114
(ii) 静力学的解析について	115
(iii) 固有振動数 $\omega_m$ と振動モード $\Phi_m(x)$ について	117
(iv) 固有振動数の実測値と理論値との比較	120
(v) 動的解析による静的撓みと曲げモーメント の計算	121
(vi) 荷重が移動する場合の動的レスポンス	123
3.2.9. ローゼ桁・吊橋への適用	124
3.2.10. 結語	131
3.3. 梁と弾性(固定)支承とよりなる構造物(弾性支承 上の連続梁)	143
3.3.1. 緒言	143
3.3.2. 周期力を受ける梁の基礎式	146
3.3.3. 連続梁の自由振動	148
3.3.4. 変位支承を有する連続梁	150
3.3.5. 回転支承を有する連続梁	154
3.3.6. 変位回転支承を有する連続梁	155

(i) 第 1 法	156
(ii) 第 2 法	158
3.3.7. 固定端を有する弾性支承上の連続梁	160
(i) 一端固定の場合	160
(ii) 両端固定の場合	161
3.3.8. 多くの支承を持つ連続梁	163
3.3.9. 結語	164
3.4. 梁と梁とよなる構造物 (格子桁・ラーメン)	168
3.4.1. 緒言	168
3.4.2. 格子桁の振動数方程式と振動モード	170
3.4.3. 種々の格子桁への適用	174
3.4.4. 数値計算例	176
3.4.5. 結語	176
3.5. 板と梁とよりでできている構造物 (防撓板)	181
3.5.1. 緒言	181
3.5.2. 四辺単純支持された防撓板	183
3.5.3. 結語	187
結 論	190
参 考 文 献	216

# 第 1 篇

## 総 論

### 緒 論

本研究は梁または板などの簡単な構造物と補強物（例えばアーチ、支承、トラス）とを組み合わせることができる複雑な構造物（複合構造物）の動的解を求める変形等置法と呼ぶ解析法を提案し、その適用範囲がきわめて広いこと、およびこれを二・三の種類の構造物に適用してこの理論の正しいことを述べ、あわせて他の解析法との比較をも行なったものである。

ここに述べる動的解析法は、静的な解析法としても、そのまま準用できるので、本論文では動的な場合についてのみ述べることにする。

構造物に動的外力が作用するとき、そのレスポンスを求めることは工学的に重要な問題であるので従来多くの研究が発表されている。これらの研究はその分野を土木・建築構造物に限ってみても、かなり広い範囲に及ぶので、ここでその個々の内容を論議することはできないが、その共通目的

としているところは構造物の固有振動数と振動モードを決定して動的外力に対するレスポンスを求め、これをもととして衝撃係数・耐震・安定などの問題に関して動的設計の基準となる資料を得ようとしていることといえよう。

一般に構造物を厳密に解析することは非常に困難な場合が多いのでその対象となる構造物はかなり限定され、例えば簡単な境界条件を持つはり構造・板などについてのみ微分方程式をもととした理論が与えられているだけである。そうしてこれらの梁・板を支承・アーチ・トラスなどで補強したものまたはこれらを少し複雑に組み合わせた構造物に対しては厳密な理論解を得ることは非常に困難である。その解決手段として現在工学的にとられている主な方法としては次の2つの近似解法があげられる。

### 1. エネルギー法 (Rayleigh, Ritz の方法等)

### 2. 集中 Mass の方法

これらの方法はよく熟知せられている方法であるから、その詳細については、ここでは省略する。これらはそれぞれ長・短所を持っているけれども、他に適当な解法が見つからないので もっぱらこの近似解法に頼っているというのが現状のようである。

本論文に述べる変形等置法は、この種の構造物の基礎



式を荷重と変形との条件より直接誘導しようとするのがその特長である。この点上記の近似解法とは異なっていると云えよう。本法は複雑な構造物に対してかなり広範囲に適用でき、対象物によっては上記の従来の方法と比較して実用的な面において決して劣らないものである。もちろん本法の適用範囲は制限されたものであり、構造物の種類によっては上記理論による方がはるかに便利となる場合も多い。とくに数値計算などの実用上の面において、本法の長所が発揮できる対象物はかなり限定される。すなわち構造物の複雑度（ここでいう複雑度とは静力学的には不静定構造物の不静定次数に相当するものであるが若干異なった意味を持っている）が大きいようなものに対して本理論を適用すると数値計算にかなりの労力を要する結果となるのでこれらに対しては余り効果がない。このような結果となるのは、上記の方法は近似解法であるゆえに、複雑度の多いものに対してもその精度を問わなければこれをある程度近似的に処理できる能力を持っているのに反し、本法は直接的な解析法であるから、複雑度按比例して振動数方程式の行列次数が増加するためである。このような融通性の欠ける面が生じる

のは直接法の持つ<sup>レ</sup>宿命的なものであり致し方がない。

上のようなわけで本法は複雑度の高い構造物に対しては適用されにくい<sup>レ</sup>が、逆に複雑度の少ない構造物に対してはその長所が大いに發揮できるようになる。詳細については本論にゆずるが、本法は基礎式の誘導の簡易さ・計算精度のチェックおよび数値計算の容易さなど従来の解析法では見られない種々の特長を持っている。

変形等置法は、従来とられてきたように最初から構造物を一体として考えて基礎式を導く方法によらないでまずその構造物を適当な数の要素（ここにこの要素とは構造物を構成している何々の部材であることもあり、またはそれらの部材の小集合体であることもある）またはブロック（要素の小集合体を一単位と考えたもの）に分割し<sup>\*</sup>、それらおのおのに対して動的周知力<sup>レ</sup>を作用させてその定常状態におけるレスポンスを求め、各単位構造物における結合点の変形を等しくした後、これらを与えられた元の構造物として組み合わせ結合することによって全体の基礎式を誘導する方法である。この分割と結合は質量の無視できるいわゆる静力学的解析可能なものと動力学

\* 今後このように分解した要素またはブロックを単位構造物と呼ぶことがある。

的解析可能なものとの組み合わせであつてもよい。

これらの組み合わせの対象となる要素としては、梁・板・トラス・索・弾性支承・中間支点等があげられるから、数値計算の難易を別にすれば、理論的にはかなり広範囲な構造物に対しても基礎式の誘導が可能となる。

このようなわけで第1篇では従来 of 解析理論の概観と変形等置法の解析原理について簡単に述べた後この両者の特長について検討を行なってみた。

第2篇においては、構造物の固有振動数と振動モードを使用して外力（荷重とモーメント荷重等）が作用する時その構造物の動的レスポンスを求めるための基礎方程式を誘導し、単位構造物（梁または直交異方性板）に種々の動的荷重が作用する時の基礎式を示し、さらに若干の数値計算例について述べた。

第3篇においては、第2篇にく誘導した基礎方程式を利用して、梁または板が、索（アーチ）・梁・弾性（中間）支承・トラス等で補強された構造物を変形等置法により解析し得ることを述べ、数値計算を行つて、この理論の正しいことを明らかにした。梁をアーチで補強した構造

物（ランガー桁・ローゼ桁・吊橋）は変形等置法が最も有利に適用できる種類のものであるから、ここではランガー桁を代表例として取り上げ数値計算・実験結果との比較などについても詳述し、他の種類のものについては基礎式の誘導を主な目的とした。

### 1.1 各種理論の概観

構造物の弾性振動を論じるにあたっては、その構造物の基礎微分方程式を立ててその解を求めるのが一般的な方法であるが、その基礎式が簡単に得られないような場合には、固有振動数と振動モードを求めこれをもとにして運動方程式を誘導するいわゆる *Modal Analysis* と呼ばれる方法がよくとられる。一般にこれらの値を決定することは困難な場合が多いけれども、この両者を決定することは動的解析を行うにあたり非常に重要な事項であるから、いまこれらを求めることに問題を限定し、現在使用されている各種理論の主なものについて簡単に述べる。構造物の弾性振動の中には縦振動・横振動・捻れ振動の3種のタイプの振動が考えられる。これらの中、構造物では

横振動の問題が最も一般的であるので、このタイプの振動についてのみ考えることにする。

### 1. 1. 1. 微分方程式の直接解

この方法はその構造物の微分方程式が与えられたとき、境界条件を満足するようにしてその基礎式の解を求めようと試みるものである。しかし、基礎式が簡単な微分方程式によって与えられることは少く、その一般解は非常に求まり難いので、現在では簡単な境界条件を持つ一様断面の梁と板について解が与えられているようである。また梁を組み合わせてできるラーメン・格子桁等の梁構造についても理論的に基礎式を誘導できるが、その方法は梁を各節点ごとに分割し、各パネルごとの梁に振動撓角法または動的曲連モーメント法等を適用する方法をとっている。これらの方法によると全く機械的に基礎式が誘導できるが、各パネルごとに梁を切断して基礎式を誘導しているために一節点において4本の梁について力の釣合と変形の連続条件を考慮しなければならないことになる。

板は、剛性の種類により等方性板・直交異方性板・斜交異方性板と区別され、その基礎微分方程式も異っている。

前者は後者に比べるとその理論解は得やすいけれども、境界条件によってその解は困難となる場合も多い。いま矩形板について述べれば、4辺単純支持または相対2辺単純支持他の2辺自由なる板についてのみ厳密解が得られており、他の境界条件のものについては理論解を得ることが困難であるから階差法などにより近似解を得る方法が種々研究されている状態である。

構造物の中にはこれらの梁・板等を索・アーチ・弾性支承・梁・トラス等で補強したものが多いが、これらを理論的に求めることは実際問題として非常に困難なようである。

### 1.1.2. エネルギー法

構造物の振動の基礎式が簡単な微分方程式で与えられ、その境界条件も比較的簡単な場合には、その理論解はかなり容易に求め得るが、これらが複雑な場合には、その微分方程式の解を求めることは特別の場合を除いては一般に困難である。このような場合には固有振動数・振動モードの決定は近似的方法によらざるを得ない。それには二、三の方法があるが、その中でエネルギーの原理にもとづく方法が最も簡便である。電子計算機が出現するまではこのエネルギー法に



よらざるを得なかったために、この方法は最も一般的に使用されてきたものである。以下エネルギー法による弾性体の振動数計算法の代表的なものとして周知の Rayleigh の方法および Ritz の方法について簡単に述べる。

いまその構造物の  $m$  次の基準振動について考える。その固有振動数を  $\omega_m$ 、振動モードを  $\varphi_m(x)$  とすれば、自由振動時の撓みは、

$$W_m(x, t) = \varphi_m(x) \sin \omega_m t \quad (1.1.2.1)$$

とあらわされるから、運動エネルギーは次式となる。

$$T_m = \frac{1}{2} \int \rho \left( \frac{\partial W_m}{\partial t} \right)^2 dx = \frac{1}{2} \omega_m^2 \int \rho \varphi_m^2(x) dx \cdot \sin^2 \omega_m t \quad \text{-----} \quad (1.1.2.2)$$

ここに  $\rho$  は単位長さ当りの質量を表わす。

また、構造物が式 (1.1.2.1) にて与えられる変形をした時のポテンシャルエネルギーを  $U_m \sin \omega_m t$  とすれば、両者の最大値は等しくなければならぬから

$$\omega_m^2 = \frac{U_m}{\frac{1}{2} \left[ \int \rho \varphi_m^2(x) dx \right]} \quad (1.1.2.3)$$

$\varphi_m(x)$  がわかっている時は、上式から固有振動数  $\omega_m$  を計算

することができる。

Rayleigh の方法は、その構造物の振動モード  $\varphi_m(x)$  を適当な関数によって仮定し、式 (1.1.2.3) を使用して固有振動数を決する方法であるが、最初に仮定する関数が真の振動モードに近いときは、精度のよい値となり、真の振動モードとかなり異った仮定の場合はその結果も当然悪くなるけれども、一般にかなりの結果が得られるようである。しかし得られた結果の精度については吟味できない。また、このようにして得られるのは最低次の振動次数のものが普通であって、高次のものは最初に振動モードを仮定することが困難なために特別の場合を除いて求めることができない。

Ritz の方法は、<sup>2) 3) 4) 5)</sup> 最初に仮定する振動モード  $\varphi_m(x)$  を

$$\varphi_m(x) = a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x) + \cdots + a_g f_g(x) \quad (1.1.2.4)$$

のように級数をもって表わす。ただし、この  $f_1(x)$ ,  $f_2(x)$  .....  $f_g(x)$  はすべて境界条件を満足する一連の適当な関数である。そして係数  $a_1$ ,  $a_2$ , .....  $a_g$  は式 (1.1.2.3) に入れて出る振動数を極小ならしめるように選定するのである。すなわち式 (1.1.2.4) にて示される振動モード  $\varphi_m(x)$  を使用すれば運動エネルギー  $T_m$ , ポテンシャルエネルギー  $U_m$  は以下のように表わされる。

$$T_m = \omega_m^2 F_1(a_1, a_2, \dots, a_g)$$

$$U_m = F_2(a_1, a_2, \dots, a_g)$$

ここに  $F_1, F_2$  は  $a_1, a_2, \dots, a_g$  の 2 次式である。

Rayleigh によればこの両者は等しいから次式を得る。

$$\omega_m^2 = \frac{F_2(a_1, a_2, \dots, a_g)}{F_1(a_1, a_2, \dots, a_g)} \quad (1.1.2.5)$$

固有振動数  $\omega_m$  が最小値をとるためには、次の  $n$  個の  
関係式を満足しなければならない。

$$\frac{\partial \omega_m^2}{\partial a_i} = \frac{\partial F_2}{\partial a_i} F_1 - \frac{\partial F_1}{\partial a_i} F_2 = 0$$

$$(i = 1, 2, 3, \dots, g)$$

上式は式 (1.1.2.5) の関係により次式のように書き換えられる。

$$\frac{\partial F_2}{\partial a_i} - \omega_m^2 \frac{\partial F_1}{\partial a_i} = 0 \quad (1.1.2.6)$$

$$(i = 1, 2, 3, \dots, g)$$

振動数方程式は式 (1.1.2.6) により与えられる線型同次連立  
方程式の係数行列を零とおいて得られる。この方法によれ  
ば、式 (1.1.2.4) の級数の項数を増加させることにより理論  
的にはいくらでも精度を高めることができ得るのみならず、級数  
の項数に応じて高次の振動数までも計算できる特長を持って

いる。しかしながら、式(1.1.2.4)において最初仮定する級数  $f_1(x)$ ,  $f_2(x)$ , ...,  $f_g(x)$  は必ずしも理論的に得られるものでなく、直観的に求めることを要求される場合もあるので、その境界条件が複雑な場合または中間に弾性支承を有するような構造等の場合には、それらの条件を満足する関数  $f_1(x)$ ,  $f_2(x)$ , ...,  $f_g(x)$  を見つけることが容易でないことも考えられる。また計算精度を高めるためにこの関数を多くとると振動数方程式の行列次数が高くなり、数値計算が困難になる点も考えなければならない。一般に *city* の方法によって得られる結果はかなり精度のよいものであり工学的にも要求精度を満たすことがよく知られているが、精度の吟味のためには、さらに高次の行列式を解かねばならないので手数が加速的に増加する。このようであるからこの方法による解の精度については或る程度の不安全感が残ることもある。

### 1.1.3. 集中 Mass の方法<sup>8) 9) 10)</sup>

この方法は考え方としては古くからあったけれども、数値計算に非常な労力を要するために従来あまり使用されなかった。しかし、最近では電子計算機の普及化とともによく使用されるようになり、前記の解析法によってはどうしても解くことのできないような

問題に対してはこの方法が適用されている。

この方法は周知のように構造物の分布質量をいくつかの適当な位置に集中させ、無限の自由度を持つ連続体を有限個の自由度を持つ振動系に置き換えたものについて解析を進める方法である。このように質量を集中させた点のおのの点の撓みの影響係数を静力学的に求めた後、各集中質量について基礎式を誘導し、固有振動数・振動モードを決定しようとするものである。この解析法によると、静力学的に撓みの影響線が求まる限り全く機械的に基礎式が誘導でき、また集中質量の数を増加させることにより所要の精度を得ることができる利点がある。しかしながら他方実際問題として振動数方程式の行列次数は集中質量の数に比例して増加するから、多数の集中質量をもつ振動系に対しては電子計算機を使用してもかなりの時間を要することになる。また最初に、質量を集中させた各点すべての撓みの影響線を計算しなければならぬので、基礎式の決定までかなりの準備計算を要する。さらにこの集中質量の数は直観的に決めるものであるが、数値計算を容易にするため、その数を少くすると低次の振動次数のものについては精度のよい計算ができて高次の振動次数のもの

ではその精度は余り期待できないことも生じよう。

## 1. 2. 変形等置法の解析原理

### 1. 2. 1. 理論

1. 1 に述べた従来の理論では、はじめから構造物を一体と考えて基礎式を誘導している。ここに変形等置法というのが解析法は、最初から構造物を一体と考えて式を誘導するのではなく、構造物をいくつかの要素（ここにいう要素とは構造物を構成している何々の部材であることもあり、またはそれらの部材の小集合体であることもある。）またはブロック（要素の小集合体を一単位と考えたもの）に分解し、それら、おののおのについて荷重（力とモーメント）と変形（変位と撓み角）との関係を求め、それらの変形を等しく置いて元の構造物に組み立てるとき、その結合点の力の釣合をもととして基礎式を誘導しようとするものである。

本法の解析理論を図 - 1. 2. 1. 1. (a) に示すような単純梁をトラスで補強した簡単な構造を例にして述べる。ただし、この梁は一樣断面のものであり、質量は単純梁のみに分布



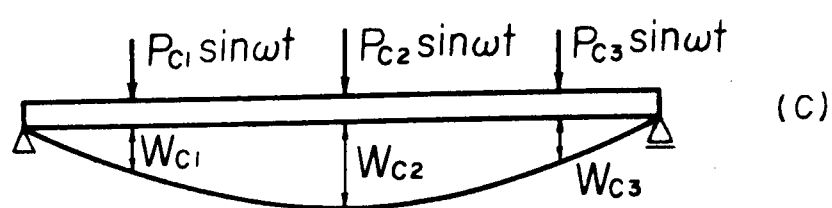
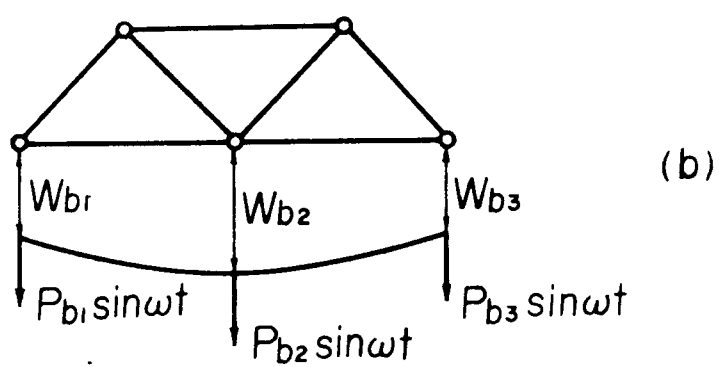
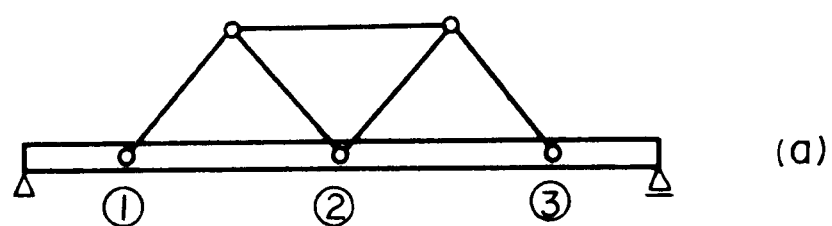


Fig. 1.2.1.1

し、トラスの質量は無視し得るものとする。図—1.2.1.1.(a)の振動系は(b)図に示すトラスと(c)図に示す単純梁とを組み合わせてできていると考えられるから、与系をこの2つの系に分解して解析を進めることにする。いま(b)系と(c)系とに同じ変形を与えてこれを重ね合せて結合することにより与系を組み立てることを考えてみる。

まず(b), (c)系の結合点となる点にそれぞれ  $P_{bi} \cdot \sin \omega t$ ,  $P_{ci} \sin \omega t$ , ( $i = 1, 2, 3$ )なる集中周期力を作動させる。このとき、その作用点の撓みは(b)系においては静力学的に求めることができ、この関係は次式にて与えられる。

$$\begin{bmatrix} W_{b1} \\ W_{b2} \\ W_{b3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{b1} \\ P_{b2} \\ P_{b3} \end{bmatrix} \quad (1.2.1.1.)$$

ここに  $b_{ij}$ , ( $i, j = 1, 2, 3$ )は静力学的方法(例えば仮想仕事法)により決定される係数である。(c)系の撓みは、強制周期力の振動数に応じて変化するものであっても上式と同じ形式により表現できる。すなわち

$$\begin{bmatrix} W_{c1} \\ W_{c2} \\ W_{c3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{c1} \\ P_{c2} \\ P_{c3} \end{bmatrix} \quad (1.2.1.2)$$

ここに  $C_{ij}$ , ( $i, j = 1, 2, 3$ ) は動力学的に求められる常数であり, 外力の振動数  $\omega$  によって変化するが, これは以下のようにして求められる。

単純梁に集中荷重  $P_i \sin \omega t$ , ( $i = 1, 2, 3 \dots$ ) が作用する時 (図-1.2.1.2), その撓みは次式により与えられる (式 (2.3.14) 参照)。

$$W(x_i) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Phi_n(x_i)}{\omega_n^2 - \omega^2} \cdot \{ \Phi_n(j_1) P_1 + \Phi_n(j_2) P_2 + \dots \} \quad \dots (1.2.1.3)$$

ここに,  $x_i$  : 測定点の座標

$j_p$  : 荷重点の座標

$\omega_n$  : 単純梁の  $n$  次の固有振動数

$\Phi_n(x)$  : 正規化した  $n$  次の振動モード

したがって式 (1.2.1.2) における  $C_{ij}$  は次式により示されるものである。

$$C_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Phi_n(x_i) \Phi_n(j_j)}{\omega_n^2 - \omega^2} \quad (1.2.1.4)$$

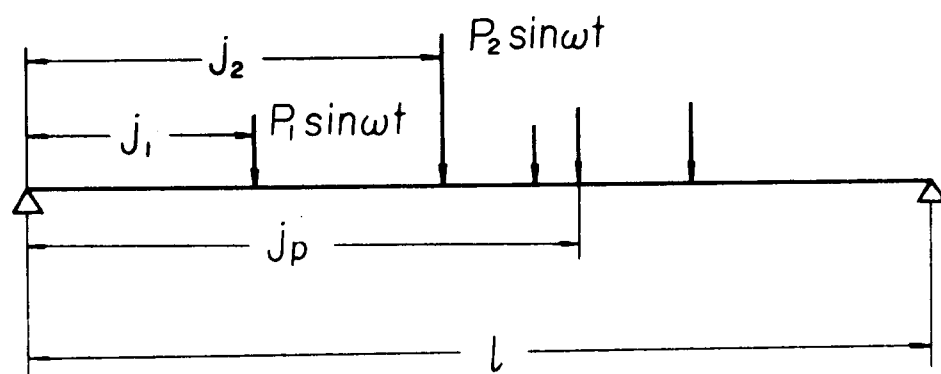


Fig. 1.2.1.2

ここで考えている強制周期力は同一位相のものであるから、 $\sin \omega t = 1$ の瞬間についてのみ考え式の表現を簡単にした。

このように変形を与えた(b), (c)系を重ね合せて結合すれば与系(a)系ができる。このためには両者の変位を等しく置く必要があるが、これは解析的には式(1.2.1.1)と式(1.2.1.2)とを等置することにより表現できる。また、このようにして結合された原系には、その結合点において

$$P_{bi} + P_{ci} = P_i \quad (1.2.1.5)$$

$$(i = 1, 2, 3)$$

によりあらわされる外力が作用していることになる。

与系が自由振動している時には、外力は零でなければならないから式(1.2.1.5)は次式となる。

$$P_{bi} + P_{ci} = 0,$$

$$\text{または } P_{bi} = -P_{ci} \quad (1.2.1.6)$$

上記の関係を式(1.2.1.1)と式(1.2.1.2)とを等置した式に代入すると次式を得る。

$$\begin{bmatrix} b_{11} + c_{11} & b_{12} + c_{12} & b_{13} + c_{13} \\ b_{21} + c_{21} & b_{22} + c_{22} & b_{23} + c_{23} \\ b_{31} + c_{31} & b_{32} + c_{32} & b_{33} + c_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{c1} \\ P_{c2} \\ P_{c3} \end{bmatrix} = 0 \quad (1.2.1.7)$$

すべてが零でない  $P_{ci}$ , ( $i = 1, 2, 3$ ) の値に対して, 上式が成立するためにはその係数行列が零でなければならない。すなわち

$$\begin{bmatrix} b_{11} + c_{11} & b_{12} + c_{12} & b_{13} + c_{13} \\ b_{21} + c_{21} & b_{22} + c_{22} & b_{23} + c_{23} \\ b_{31} + c_{31} & b_{32} + c_{32} & b_{33} + c_{33} \end{bmatrix} = 0 \quad (1.2.1.8)$$

この関係は振動数方程式に他ならない。式 (1.2.1.8) より得られた固有振動数  $\omega_m$ , ( $m = 1, 2, 3, \dots, \infty$ ) の値を式 (1.2.1.7) に代入すると,  $P_{ci}$ , ( $i = 1, 2, 3$ ) の比が決定できるので, この比を式 (1.2.1.3) に代入すると振動モード  $\varphi_m(x)$  が決定する。

ここに変形等置法と呼ぶ解析法は上述のように, 構造物を解析のしやすい適当な単位構造物 (要素またはブロック) に分解し, それらおのおのについて荷重と変形との関係を求め, 元の構造物に対する基礎式を誘導しようとするものである。これらの荷重と変形との関



係の中には、上述のトラスの例のように静力学的に決定したものを含んでいてもよいが、その中にはどれか一つ動力学的に求められる関係式が存在することが必要である。全部が静力学的に求めたものであれば、当然不静定構造物の静的解析を行ったことになる。ゆえにこの解析法は静的問題に対しても適用できることがわかる。

上述の例題においては、その分解した構造物（すなわち単位構造物）に作用する荷重として集中荷重を使用し、変形には撓みを使用したけれども、換レ剛性を考慮した格子桁のように、その結合点において角度の変化をも考慮しなければならないような構造物に対しては、作用させる外力には集中荷重の他にモーメント荷重も同時に考えなければならない。このように作用させる荷重は構造物の種類により適当に選択すべきものであつて、例えばランガー桁・ローゼ桁・吊橋のように拋物線状のアーチを持った構造物に対しては一様等分布周期力を選ぶべきで、これを他の荷重によつて解析しようとしても無理である。それらの選択すべき外力は適用例（第3篇）

を参照すれば自ら理解できるものと思う。

はじめに構造物を単位構造物に分解する時、その分解の仕方は任意であるけれども、その各要素またはブロックごとに荷重と変形との関係が容易に与えられるものでなければならぬ。

質量の無視できるものについては静力学的解析が可能であるから問題ないとしても、質量の考慮を必要とするものについては、周期荷重を作用させたとき、そのレスポンスが容易に求まるものを基本系に選ぶ必要がある。その選び方は大切であり、例えば図-1.2.1.1(a)のような振動系において、梁部を①、②、③の断面にて切断した基本系をつくってそれら切断点の変位を等置しようとするならば、変位と荷重との関係はかなり複雑な式によってあらわされることになり数値計算も厄介となろう。

### 1.2.2. 特長

後に述べるように、変形等置法はかなり広い範囲の構造物に対して適用されるものであるが、ここでは一応原則的なことのみについて述べ、似たの問題については適用例の所にゆずることにしたい。

この理論の特長としては、まず適用範囲がかなり広いことがあげられる。(1.2.1)の記述からもわかるようにこの変形等置法は、まず構造物全体を解析容易なる単位構造物にわけ、それぞれに対して適当な数の周期力を作用させた時のレスポンスを求め、それらを使って構造物全体の基礎式を誘導しようとするものである。このとき各単位構造物に対するレスポンスの中には静力学的に求められるものをも含まれてよいのであるから、本解析法は動力学的なもの同志か、または、これと静力学的なもの(弾性支承を含む)との組み合わせからなる構造物のいずれにも適用され得る。さらに、上のような構造物が中間支承をもったりあるいは両端において固定されている場合には、上述の解析により得られたものにあらかじめその支持条件を満足させるようにするならば、これを解析することが可能となる。したがって数値計算の難易(このことについては次項にのべる)を別とすれば理論的にはかなり広範囲な構造物に対して適用されることがわかつて思う。

しかしながら、構造物の中には、動的レスポンスまたは

静的レスポンスが解析できたとしても簡単に結合できないものが若干あることに注意しなければならない。例えば図 1.2.1.1(a) の例のように要素を点において結合する場合には問題ないが、線結合を必要とするようなもの(具体的には板と梁とを結合させたもの等)に対しては、この結合が簡単にはできない場合もある。一般に動的レスポンスが簡単に求められるものは、単純な境界条件を持った梁・板であり、静的レスポンスの求められるものとしては、梁・索・トラス・弾性支承等が考えられるから、本法はこれらを組み合わせたものについて適用できることがわかる。これらの実際例については(1.2.3)においてくわしく述べる。

次に本理論の特長に関するものとして数値計算の難易について触れなければならない。図 1.2.1.1.(a) に示すような構造物の振動問題を論じる場合、従来の理論では(1.1.2)に述べた *Ritz* の方法か、あるいは集中 Mass の方法によるのが普通であるけれども、後者は一般に電子計算機を必要とし、数値計算にかなりの労力を要するので、ここでは本法と *Ritz* の方法との比較を

主として述べたいと思う。

変形等置法における振動数方程式は、式(1.2.1.8)からわかるように、その振動数方程式の行列次数は単位構造物の結合点に作用させた荷重の数によってきまる。その荷重には、集中荷重とモーメント荷重との2種類があるのでいま結合点の数を $p$ とすると、振動数方程式は一般に $2p$ 次の行列により与えられる。換り剛性を無視した格子桁等に対しては、作用させる荷重は集中荷重だけでよくモーメント荷重は不要であるから振動数方程式は $p$ 次の行列となる。その行列の元素は式(1.2.1.4)の無限級数の和により与えられるが、実際の計算を行ってみるとはじめの数項をとれば充分の精度が得られるようである。

数値計算の難易はまず行列の次数の大小に支配されるものと考えられるから、電子計算機を使用できる今日でもなお、式中の行列次数をできるだけ下げることが重要な要素となる。特に固有値問題に対しては静的な場合と比べて比較にならぬ程計算時間が短縮できる。また、その行列元素は無限級数の和として与えられているので、その項数を増加させることによって計算精度をあげることができるわけで、

行列の次数と計算精度とは一応無関係となっているため、結合点の少ない構造物に対して本理論は非常に有利となることがわかる。

このような振動数方程式は試算法によって求めるのが便利であるが、適当な  $\omega$  の値を代入することにより振動次数とは無関係にいくらでも高次の固有振動数を求めることもできる。さらにこのようにして得られた固有振動数  $\omega_m$  の値を用いれば結合点に作用させた荷重相互の比が決定できるから振動モード  $\varphi_m(x)$  は容易に求められる。もちろんこの場合においても結合点に作用させる荷重が少なくてすむような構造物に対しては、これら荷重相互の比がとくに簡単に計算できることは式 (1.2.1.7) よりわかるところである。

図 1.2.1.1 (a) の例題では式 (1.2.1.3) を用いれば振動モード  $\varphi_m(x)$  が単純梁の正規化した振動モード  $\varphi_n(x_i)$  の和として決定できる。単純梁の振動モード  $\varphi_n(x_i)$  は正弦波関数で与えられるから、結果的には上述の解析により求めた振動モードは原振動系の振動モード  $\varphi_m(x)$  を  $\sin$  のフーリエ級数に展開したことになる。つまり式 (1.2.1.3) はフーリエ級数の各係数が求まった式となっている。

またその項数はいくらでも多くとれるから正確なモードが決定できる。

この問題を *Ritz* の方法によって解いた場合と比較してみよう。*Ritz* の方法ではまず与えられた振動モード  $\varphi_m(x)$  を式 (1.1.2.4) のように適当な関数の和によって近似する。

すなわち

$$\varphi_m(x) = a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x) + \cdots + a_g f_g(x) \quad (1.1.2.4)$$

そうしてこの変形に対する *Potential Energy* と *Kinetic Energy* とを求めて式 (1.1.2.6) により振動数方程式を求めると、この振動数方程式の行列次数は最初に振動モードを仮定した関数の項数  $g$  により支配される。精度のよい計算を行おうとすれば  $g$  を大きくする必要があるから当然行列の次数は増加し数値計算にはかなりの労力を要することになる。このようにして求められた固有振動数は最初仮定した関数の項数  $g$  により支配される計算精度を持つものであるから、 $g$  の値をさらに大きくした場合その結果がどのように変化するかについては全く吟味することとができない。この点変形等置法では振動数方程式の行列元素の収束性を吟味することによって、大体どのような

誤差を持っているかが検討できる利点がある。また *Ritz* の方法では、振動モード  $\varphi_m(x)$  は式 (1.1.2.6) に、求められた固有振動数の値を代入し、 $q$  元の連立方程式を解いて  $Q_i$  ( $i = 1, 2, \dots, q$ ) の比を決定し、この比を式 (1.1.2.4) に代入して振動モード  $\varphi_m$ , ( $m = 1, 2, \dots, q$ ) を得ることとなる。変形等置法ではこの連立方程式の未知数は作用させた荷重の数によって決まるから結合点の少ないほど数値計算が有利となる。*Ritz* の方法では  $q$  次以上の振動次数のものについては (このことは工学的に要求されることは余りないけれども) あらためて新しい関数を仮定して式 (1.1.2.6) を作り、上と同じ解析をくりかえす必要が生じるが、変形等置法ではその必要が全くない。

このような解析過程を考えれば両者の優劣は自らはっきりするのであるが、*Ritz* の方法では結合点の多い構造物であつても、最初に仮定した関数の項数に応じて振動数方程式の行列次数が決定するから、精度を高めなければ近似値の得られる利点がある。しかしながら *Ritz* の方法ではモードを仮定しなければならないので、その Mode の関数が容易に表現できないような構造物もあることに注意しなければならない。



上に述べたことから両者を比較してみると結合点の少ない構造物に対しては変形等置法が便利であり、結合点の多い構造物に対しては  $Ritz$  の方法の方が有利となるように考えられる。しかし変形等置法は結合点の多い構造物に対しても有利な対策法を持っている。それは最初、構造物を単位構造物に分解して変形を与え結合する時その結合を必ずしも同時に全部行わなくてもよいから、数値計算の容易なものから順次結合を繰返して行くという方法、あるいは結合点を粗に選んで近似値を求める方法、またはこの近似値を最初に求めた振動数方程式中に使用することによって比較的容易に精算値を求める方法等である。また、構造物を単位構造物に分解する前に構造物全体を適当なブロックに分割し、その各ブロックごとに上述の結合を行い最後にこのブロックをもとの構造物（すなわち原振動系）に結合する方法も考えられる。このような解析法をとれば比較的容易に数値計算を行うことが出来るからきわめて便利となる。この方法の具体例は(3.3)において述べる。

梁を主体とした格子・ラーメン構造の振動解析には、

主として微分方程式の直接解より誘導した振動撓角法・動的回連モーメント法等により基礎式を誘導するが、この方法によればその振動数方程式は $2p$ 次の行列となる（ここに $p$ は節点数または格点数）。変形等置法によっても一般には $2p$ 次の行列となるが、問題によっては $p$ 次の行列にあらわすことも可能である。この実際例については梁の適用例の所でくわしく述べるけれども（一例をあげると桁の捩れ剛性を無視した格子桁がその具体例となる）、このように行列次数を下げることで来るとその構造物に対しては数値計算が非常に容易になることはいうまでもない。

変形等置法はあくまでも荷重と変位との関係式をもとにして基礎式を誘導する直視的な方法であり、エネルギー法と比べて対照的である。図-1.2.1.1(a)のような構造物では、従来 Ritz のエネルギー法か集中 Mass の方法によるしか解析手段がなかったが、これらはいずれも近似解であるに反し、変形等置法による基礎式は、これは解析途中に近似を全く行っていないのでこれより得られる結果は1.1.1の微分方程式の直接解に近い精算値と考えられ

る。

しかし、上記の Ritz の方法、集中 Mass の方法は、変断面の複雑な形状を有する問題に対しても近似解を得られる普遍性を持つのに反して、変形等置法は、分解した構造物の動的レスポンスが簡単に得られなければ実用には余り効果がないから、その適用範囲は上記の2方法よりかなり制限されたものとなるのはやむを得ない。ただし変断面の構造のものでもその程度が余り大きくなければ、これを適当な定断面構造に置きかえることは可能であり、数値計算の結果得られた値もかなり満足できるようである。

### 1.2.3 適用範囲

この変形等置法は(1.2.2)において述べたように、まず構造物全体を適当な要素またはブロックに分解し、そのおのにおに変形を与え、それらを組み合わせて原振動系の基礎式を誘導する方法をとった。このような方法によると本法は動力学的に求められるもの同士の組み合わせ、動力学的に求められるものと静力学的に求められるものとの組み合わせの2つに適用できる。すなわち、いま動力学的解析可能なものを動的構造物、静力学的解析可能なものを静的

構造物と呼ぶならば、与えられた構造物をこれら兩者のどれかに分解した場合、下記のブロック図に示す組み合わせのものについて本法が適用できることになる。

$$\boxed{\text{動的構造物}} \times \begin{cases} \boxed{\text{動的構造物}} \\ \boxed{\text{静的構造物}} \end{cases}$$

一般に動的レスポンスの解析が容易なものは、単純な支持条件を持つ一様断面構造の梁・板（直交異方性板も含む）が主であり、静的解の得られるものは多く数えられるけれども、動的構造物と結合容易なものとしては、梁・索（アーチ）・トラス・弾性支承（固定支承・中間支承も特別な場合としてこれに含むことができる）があげられる。これらを組み合わせてできる構造物の主なるものを列挙すると下記のような種類のものが考えられる。

1) 梁とアーチまたは索とよりできているもの

例：ランガー桁，ローゼ桁，吊橋

2) 梁と弾性（中間）支承とよりできているもの

例：弾性支承上の連続梁

3) 梁と梁とよりできているもの

例：ラーメン，格子桁

4) 板と梁とよりできているもの

例：防撓板

5) 梁とトラスとよりできているもの

例：トラス梁，斜材を持つランガー桁

6) 板と弾性（中間）支承とよりできているもの

例：支持点を有する板

### 1.3 結 語

以上，(1.1)においては従来使用されてきた各種理論の概要について述べ，(1.2)においては変形等置法の解析理論とその特長，およびその適用範囲について述べあわせて従来の理論との比較についてもふれたが以下のことがいえると思う。

従来構造物の振動を論じる場合，簡単な支持条件を持つ梁・板等のように微分方程式をもととした直接解が得られるような場合を除くと，その殆んどが *Ritz* のエネルギー法または集中 *Mass* の方法によってその解を求めることが試みられてきた。これらの方法は工学的な要求精度を必要とする問題の解決には充分応じたもの

であり、特に *Ritz* の方法は構造物以外の機械要素等他の方法ではその解を得ることが殆んど不可能と考えられるような問題にまで使用されている現状を考えると、その理論の価値について今更論じる余地はない。しかしこの方法はあくまでも最初に仮定した関数をもとにして、その上に成り立つ近似解法であることに留意しなければならない。すなわち最初に仮定する関数を直観により求めることが先決問題であり、次に得られた結果の精度についても充分注意する必要がある。このような難点も含んでいるので、容易にこの方法の適用し難い構造物もいくらか生じよう。

これまで理論を主にした貴重な研究が多く発表されているが、それらの研究は実用的にかなりはん雑であつたり、または旧来の問題については便利であるけれども共通性のかける面もあつたりして、いわゆる汎用性に富んだ動的解法は少なかつたようである。

ここに述べた変形等置法は上述の意味では直接解であり、その適用範囲も *Ritz* の方法にまでは及ばないとしてもかなり広範囲の構造物に対しても使用でき、

しかも種類によつては  $Ritz$  の方法よりも簡単にかつ精度のよい数値解が求まることを考えると、本法は直接解の求める範囲を幾分拡張し、上記の近似解法と理論解法との間に存在していた空間をある程度埋めたと考えてよい。このような意味において今後実用される例もかなり出るものと思われる。

## 第 2 篇

### 単位構造物の基礎方程式

#### 2.1. 概説

変形等置法では分解した単位構造物の動的レスポンスをもととして基礎式を誘導する方法によるので、第2篇ではこれら解析基本となる部材の動的レスポンスを求めることを主な目的としよう。一般に構造物の運動方程式は、その固有振動数・振動モードを求め、これを Lagrange の運動方程式に入れることによって誘導できるので、最初にこれらを使用して動的外力をうける構造物の一般式を誘導し、次に個々の部材の基礎式について述べる。

#### 2.2. Modal Analysis による構造物の動的解析

一般に構造物は連続体よりできているために無限個の固有振動数・振動モードが存在する。いまそれらの中  $m$  次の振動次数に対応する固有振動数を  $\omega_m$ 、振動モ



ードを  $\varphi_m(x)$  であらわすことにする。振動モード  $\varphi_m(x)$  はその形状はきまっているが、その振中の大きさは自由に決定できるので式の表現を簡単化するため便宜上次の正規化条件を満足するようにその大きさを決定し、これを  $\Phi_m(x)$  であらわす。

$$C_m^2 \int \rho \varphi_m^2(x) dx = \int \rho \Phi_m^2(x) dx = 1 \quad (2.2.1)$$

$$C_m \varphi_m(x) = \Phi_m(x) \quad (2.2.2)$$

ここに  $\rho$  : 単位長さ当りの質量

今後このようにして決定した振動モード  $\Phi_m(x)$  を正規化モードと呼ぶことにする。また次数の異なる振動モード相互間には次式で与えられる直交関係が存在することは周知の通りである。

$$\left. \begin{array}{l} m=n \text{ のとき} \quad \int \rho \Phi_m^2(x) dx = 1 \\ m \neq n \text{ のとき} \quad \int \rho \Phi_n(x) \Phi_m(x) dx = 0 \end{array} \right\} \quad (2.2.3)$$

構造物が振動モード  $\Phi_m(x)$  にて示される変形をした時、そのポテンシャルエネルギーを  $U_m$  とあらわせば、式 (1.1.2.3), (2.2.1) により固有振動数  $\omega_m$  と  $U_m$  との間には次の関係がある。

$$\omega_m^2 = \frac{U_m}{\frac{1}{2} \left[ \int \rho \Phi_m^2(x) dx \right]} = 2 U_m \quad (2.2.4)$$

動的外力が構造物に作用した時、そのレスポンス  $w$  を次式にてあらわす。

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} w_m = \sum_{m=1}^{\infty} q_m(t) \Phi_m(x) \quad (2.2.5)$$

ここに、 $q_m$ 、( $m = 1, 2, \dots, \infty$ ) は時刻  $t$  のみの関数で一般座標である。レスポンスをこのような関数であらわすとその運動エネルギーは直ちに

$$T = \frac{1}{2} \int \rho \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dx = \frac{1}{2} \int \rho \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \dot{q}_m \Phi_m(x) \right\}^2 dx \quad (2.2.6)$$

であることがわかる。 $\Phi_m(x)$  の変形に対するポテンシャルエネルギーを  $U_m$  であらわしたから、 $q_m \Phi_m(x)$  なる変形に対するポテンシャルエネルギーは  $q_m^2 U_m$  である。ゆえに

Lagrange の運動方程式

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_m} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_m} + \frac{\partial U}{\partial q_m} = Q_m \quad (2.2.7)$$

に上記の  $T, U$  の関係を使用すれば次式が得られる。

$$\ddot{q}_m + \frac{U_m}{\frac{1}{2} \int \rho \Phi_m^2(x) dx} q_m = \frac{Q_m}{\int \rho \Phi_m^2(x) dx} \quad (2.2.8)$$

上式は式(2.2.1), (2.2.4)を使用すると次式のようにあらわされる。

$$\ddot{q}_m + \omega_m^2 q_m = Q_m \quad (2.2.9)$$

### (i) 集中荷重が作用する場合

集中荷重  $P(t)$  が  $x = x_j$  なる座標点に作用する場合について考えてみる。微小変位  $\delta q_m$  に対して一般力  $Q_m$  のなす微小仕事は

$$\sum_{m=1}^{\infty} Q_m \delta q_m = P(t) \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \bar{\Phi}_m(x=x_j) \delta q_m \right\} \quad (2.2.10)$$

で与えられる。したがって両辺の  $\delta q_m$  の係数を比較して、一般力  $Q_m$  は

$$Q_m = \bar{\Phi}_m(x=x_j) P(t) \quad (2.2.11)$$

により与えられることがわかる。集中荷重  $P(t)$  が作用する時式(2.2.9)は次式となる。

$$\ddot{q}_m + \omega_m^2 q_m = \bar{\Phi}_m(x=x_j) P(t) \quad (2.2.12)$$

上式は右辺に時間の関数を含む2次の線型微分方程式で左辺の係数はすべて常数である。したがって強制振動の一般理論から容易にその解が求められる。

この解と式(2.2.5)とを使用すれば構造物の動的レス

ポンスが求められるけれども、便利に使用できるように以下の形に書きかえる。すなわち、測定点の座標を  $x_i$  とすると、この点の  $m$  次の振動次数に対するレスポンスは式 (2.2.5) を使用して

$$W_m = f_m \Phi_m (x = x_i) \quad (2.2.13)$$

とあらわされるから、 $f_m$  の代りに  $W_m$  を使用すると式 (2.2.12) は次式のように書きかえられる。

$$\ddot{W}_m + \omega_m^2 W_m = \Phi_m (x = x_i) \Phi_m (x = x_j) P(t) \quad (2.2.14)$$

ここに

$x_i$  : 測定点の座標

$x_j$  : 荷重点の座標

またこの時の撓み角  $\theta$  は、撓み曲線の一次微分として与えられるから、式 (2.2.14) を使用すれば  $m$  次の振動次数に対するレスポンス  $\theta_m$  は次式によりあらわされる。

$$\ddot{\theta}_m + \omega_m^2 \theta_m = \Phi'_m (x = x_i) \Phi_m (x = x_j) P(t) \quad (2.2.15)$$

したがって撓み角  $\theta$  は次式によって示される。

$$\theta = \sum_{m=1}^{\infty} \theta_m \quad (2.2.16)$$

一般に  $n$  階の微分方程式は、バネと質量からなる

簡単な自由度1なる振動系に外力  $P(t)$  が作用する時の運動方程式である。しかるに、荷重  $P(t)$  が構造物上の任意の点  $x = x_j$  点に作用する時、その  $x_i$  点の  $m$  次のレスポンスを求める式はやはり式 (2.2.14) により与えられる2階の微分方程式となるから、その構造物の振動系は図 2.2.1 のようなバネと質量からなる簡単な力学モデルにより置きかえることができる。この時の等価質量と等価バネ常数は式 (2.2.14) より次式にてあらわされることがわかる。

$$\left. \begin{aligned} M_m &= \frac{1}{\Phi_m(x=x_i) \Phi_m(x=x_j)} \\ K_m &= \frac{\omega_m^2}{\Phi_m(x=x_i) \Phi_m(x=x_j)} \end{aligned} \right\} \quad (2.2.17)$$

動的荷重を受ける構造物のレスポンスを求めるにあたり、このような等価力学モデルを考えることは、力の伝達・分配を図式的にはつきりと把握することが容易であるのみならず、複雑な振動系が構造物に附加された場合でも、その運動方程式はたんに連成振動の問題として容易に誘導できる利点がある。その例は次の移動荷重の作用する場合に示される。

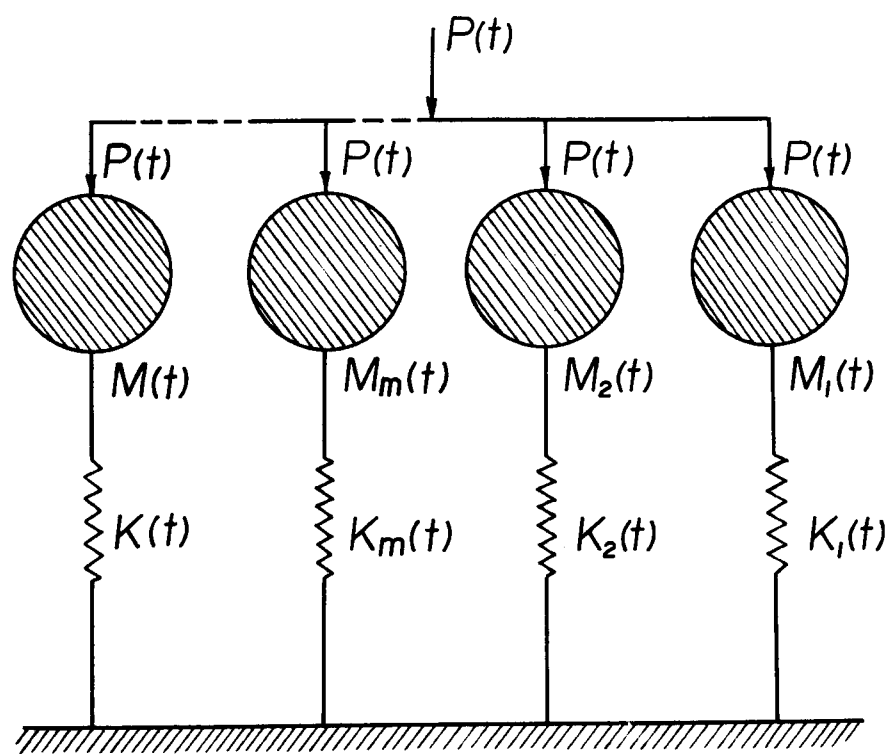


Fig. 2.2.1

### (ii) 移動荷重が作用する場合

式(2.2.14)は  $x = x_j$  なる固定点に集中力  $P(t)$  が作用したとき,  $x_i$  点における  $m$  次のレスポンスを求める運動方程式である。したがって移動荷重が作用する場合には, たんに荷重点の座標を時間の関数として  $x = x_j(t)$  とおけばよい。この時式(2.2.14)は式(2.2.18)となる。

$$\ddot{w}_m + \omega_m^2 w_m = \phi_m(x = x_i) \phi_m\{x = x_j(t)\} P(t) \quad (2.2.18)$$

上式は構造物の固有振動数と振動モードが与えられたならば, 荷重  $P(t)$  が任意の速度で移動する時, 任意の点のレスポンスを求める一般式となる。

また, この時の等価モデルは前と同様にして図 2.2.2 によりあらわされ, その等価質量  $M_m$ , 等価バネ常数  $K_m$  は時間の関数となり

$$\left. \begin{aligned} M_m(t) &= 1 / \left[ \phi_m(x = x_i) \phi_m\{x = x_j(t)\} \right] \\ K_m(t) &= \omega_m^2 / \left[ \phi_m(x = x_i) \phi_m\{x = x_j(t)\} \right] \end{aligned} \right\} \quad (2.2.19)$$

により与えられることがわかる。このように移動荷重が構

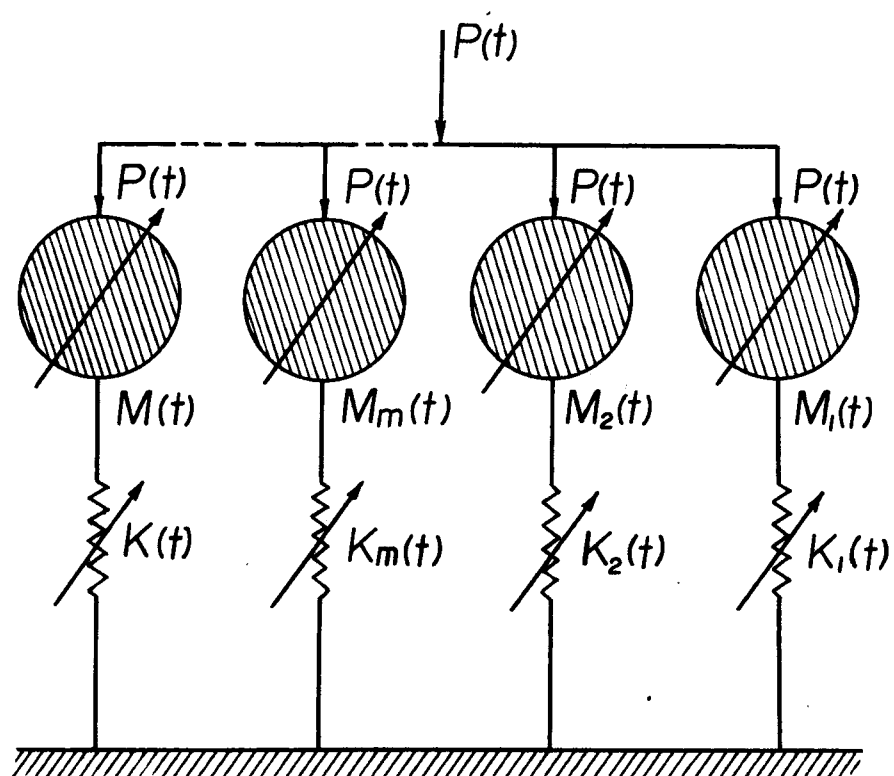


Fig. 2.2.2



造物に作用するとき、その振動系を簡単な力学モデルで置き換えることができると、自動車のように複雑な振動系を持つ荷重が移動する場合においても全体の振動系を力学モデルで表わすことにより、基礎方程式も連成振動の問題として容易に誘導することができる。いま一例として、自動車がバネ下質量  $m_1$ 、バネ上質量  $m_2$ 、バネ常数  $k$  なる振動系からできている場合について考えてみる。この振動系の等価モデルは図 2.2.3 で表わされ、この図をもととして運動方程式は次式のように与えられる。

$$\left. \begin{aligned}
 m_2 \ddot{V}_2 &= -k(V_2 - V_1) + m_2 g \\
 m_1 \ddot{V}_1 &= k(V_2 - V_1) + m_1 g - X \\
 V_1 &= \sum_{m=1}^{\infty} \left[ w_m \cdot \frac{\bar{\Phi}_m \{x = x_i(t)\}}{\bar{\Phi}_m(x = x_i)} \right] \\
 M_1(t) \ddot{w}_1 &= -K_1(t) w_1 + X \\
 M_2(t) \ddot{w}_2 &= -K_2(t) w_2 + X \\
 &\dots\dots\dots \\
 &\dots\dots\dots \\
 M_m(t) \ddot{w}_m &= -K_m(t) w_m + X
 \end{aligned} \right\} \quad (2.2.20)$$

式 (2.2.20) は多変連立微分方程式であるから、通常の

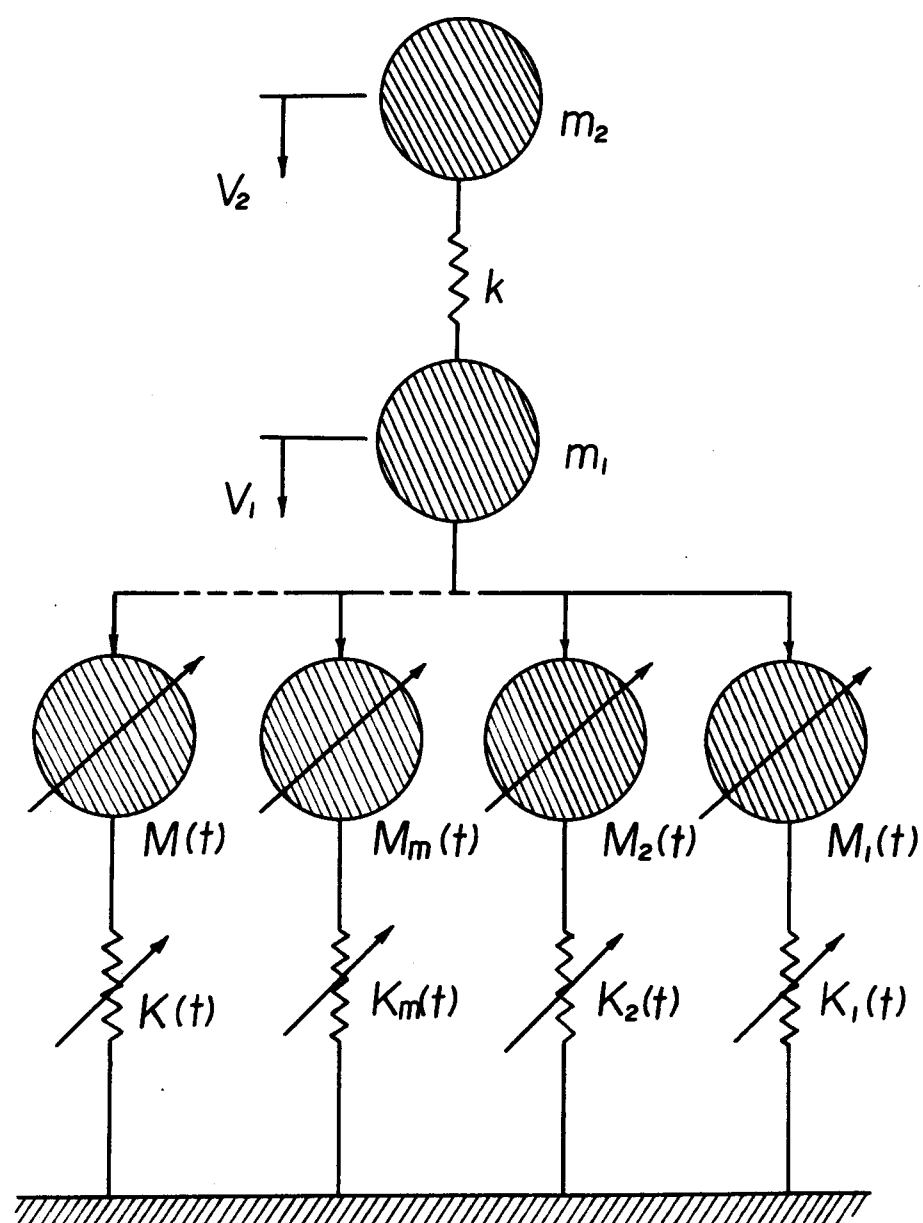


Fig. 2.2.3

方法によっては簡単に解くことはできないが、電子計算機とくにアナログ計算機を使用すればその解は容易に求めることができるものである。

### (iii) 分布荷重が作用する場合

分布荷重  $p(x, t)$  が作用する場合、微小変位  $\delta q_m$  に対して一般力  $Q_m$  のなす微小仕事は

$$\sum_{m=1}^{\infty} Q_m \delta q_m = \int p(x, t) \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \Phi_m(x) \delta q_m \right\} dx$$

で与えられるから、一般力  $Q_m$  は

$$Q_m = \int p(x, t) \Phi_m(x) dx \quad (2.2.21)$$

により決定できることがわかる。一般力  $Q_m$  が求まると集中荷重の場合と同様に式 (2.2.9), (2.2.13) により、分布荷重  $p(x, t)$  が作用する時の基礎式として次式を得る。

$$\ddot{w}_m + \omega_m^2 w_m = \Phi_m(x=x_i) \left\{ \int p(x, t) \Phi_m(x) dx \right\} \quad (2.2.22)$$

また、この時の撓み角  $\theta_m$  は次式により示される。

$$\ddot{\theta}_m + \omega_m^2 \theta_m = \Phi'_m(x=x_i) \left\{ \int p(x, t) \Phi_m(x) dx \right\} \quad (2.2.23)$$

### (iv) モーメント荷重が作用する場合

図 2.2.4(a) に示すように、動的モーメント荷重  $M(t)$  が構造物に作用する時、そのレスポンスを求めることについて考える。このモーメント荷重は図 2.2.4(b) のように微小な距離  $\Delta x_j$  に作用する偶力として置き換えることができる。

このようにモーメント荷重を一たん 2 つの集中荷重の和として等価的にあらわすことができたならば、そのレスポンスは、集中荷重に対する基礎方程式、式 (2.2.14) を使用して直ちに決定できる。いま、 $\Phi_m(x_i) = \bar{\Phi}_m(x=x_i)$ ,  $\Phi_m(x_j) = \bar{\Phi}_m(x=x_j)$  と略記すれば、基礎式は次式のようにあらわされる。

$$\begin{aligned} \ddot{W}_m + \omega_m^2 W_m &= \bar{\Phi}_m(x_i) \{ \bar{\Phi}_m(x_j + \Delta x_j) - \bar{\Phi}_m(x_j) \} P(t) \\ &= \bar{\Phi}_m(x_i) \lim_{\Delta x_j \rightarrow 0} \left\{ \frac{\bar{\Phi}_m(x_j + \Delta x_j) - \bar{\Phi}_m(x_j)}{\Delta x_j} \right\} P(t) \Delta x_j \\ &= \bar{\Phi}_m(x_i) \bar{\Phi}_m'(x_j) M(t) \end{aligned} \quad (2.2.24)$$

すなわち上式よりモーメント荷重が作用する時そのレスポンスを求めるには、集中荷重が作用するときの撓みを求める式 (2.2.14) において、単に  $\bar{\Phi}_m(x_j)$  のかわりに  $\bar{\Phi}_m'(x_j)$ , 集中荷重  $P(t)$  のかわりにモーメント荷重  $M(t)$  と置けばよいことがわかる。

また撓み角  $\theta_m$  は式 (2.2.15) の関係がそのまま使用できる。

$$\ddot{\theta}_m + \omega_m^2 \theta_m = \bar{\Phi}_m'(x=x_i) \bar{\Phi}_m'(x=x_j) M(t) \quad (2.2.25)$$

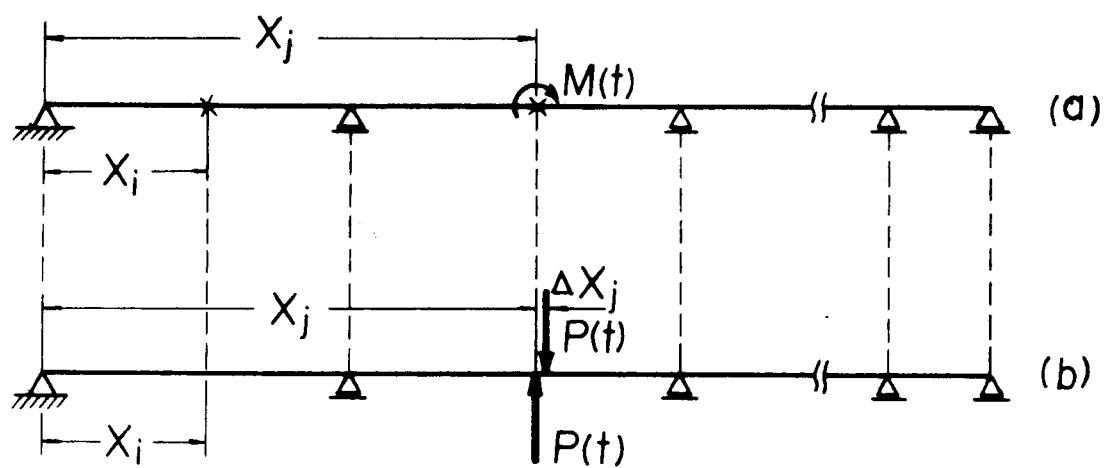


Fig. 2.2.4

以上述べた事より、構造物の固有振動数  $\omega_m$  の正規化モード  $\bar{\phi}_m(x)$  が求まると、動的な外力すなわち集中荷重・分布荷重・移動荷重・モーメント荷重が作用する時、撓みおよび撓み角の動的レスポンスを求める運動方程式が容易に誘導できることがわかる。

なお、今後必要に応じて上記のように

$$\bar{\phi}_m(x_i) = \bar{\phi}_m(x=x_i), \quad \bar{\phi}_m(x_j) = \bar{\phi}_m(x=x_j)$$

と略記することがある。

#### (1) 一定周期力が作用する場合

動的荷重の特別な場合として一定周期力が考えられる。この周期力は工学上の実問題としてもよく使用される荷重であるし、また後の変形等置法による解析過程においても必要とする荷重があるので、その解を示しておこう。上に述べたようにどの種の動的荷重に対しても(移動荷重を除く)、レスポンスを求める基礎式は常数を係数とする2階の微分方程式により与えられたから、周期力が作用する時の定常状態の解は簡単に得られる。

集中荷重  $P_0 \sin \omega t$  が作用する時、運動方程式 式(2.2.14)、(2.2.15)の解は次式となる。

$$W_m = \frac{1}{\omega_m^2 - \omega^2} \cdot \Phi_m(x_i) \bar{\Phi}_m(x_j) p_0 \sin \omega t \quad (2.2.26)$$

$$\theta_m = \frac{1}{\omega_m^2 - \omega^2} \cdot \Phi'_m(x_i) \cdot \bar{\Phi}_m(x_j) p_0 \sin \omega t \quad (2.2.27)$$

等分布荷重  $p_0 \sin \omega t$  が作用する時, 式 (2.2.22), (2.2.23) の解は次式により示される。

$$W_m = \frac{1}{\omega_m^2 - \omega^2} \cdot \bar{\Phi}_m(x_i) \left[ \int_0^l \Phi_m(x) dx \right] p_0 \sin \omega t \quad (2.2.28)$$

$$\theta_m = \frac{1}{\omega_m^2 - \omega^2} \cdot \bar{\Phi}'_m(x_i) \left[ \int_0^l \Phi_m(x) dx \right] p_0 \sin \omega t \quad (2.2.29)$$

モーメント荷重  $M_0 \sin \omega t$  が  $x_j$  点に作用する時, 式 (2.2.24), (2.2.25) は次式のように解ける。

$$W_m = \frac{1}{\omega_m^2 - \omega^2} \cdot \bar{\Phi}_m(x_i) \cdot \Phi'_m(x_j) M_0 \sin \omega t \quad (2.2.30)$$

$$\theta_m = \frac{1}{\omega_m^2 - \omega^2} \cdot \bar{\Phi}'_m(x_i) \cdot \Phi'_m(x_j) M_0 \sin \omega t \quad (2.2.31)$$

#### (vi) 減衰を考慮した場合について

いままで, 構造物の減衰の影響を無視した場合について基礎式を誘導してきたけれども, この減衰の影響は或程度近似的に運動方程式中に入れることができる。構造物の減衰は, 鋼・コンクリート構造内部のエネルギー損失。

支点および節点部の固体摩擦などいろいろ複雑な要素に起因するものであるから、それらの要素を直接式の中に入れることはほとんど不可能であるので、一般には次のような簡便な方法が使用されている。それは構造物の自由振動を実測してみると、その減衰の状態はほぼ対数減衰するという事実をもととして、減衰は変位速度に比例するという簡単な仮定を設けて理論式に取り入れる方法である。このような方法によると図 2.2.1 に示す等価モデルは図 2.2.5 に示す力学モデルであらわされる。このようにして減衰の影響も処理すると、その減衰係数は実測して得た値を使用することになる。しかし、実在構造物の減衰の影響は低次の振動モードに対しては比較的小さく、固有振動数・振動モードの諸数値に大きな影響を与えることは考えられないので、今後は減衰の影響は無視し、構造物を理想状態の弾性体と考えて理論を発展させることにする。

## 2.3 梁の動的レスポンス

### 2.3.(i) 緒言

2.2 において構造物の固有振動数と振動モードが求ま



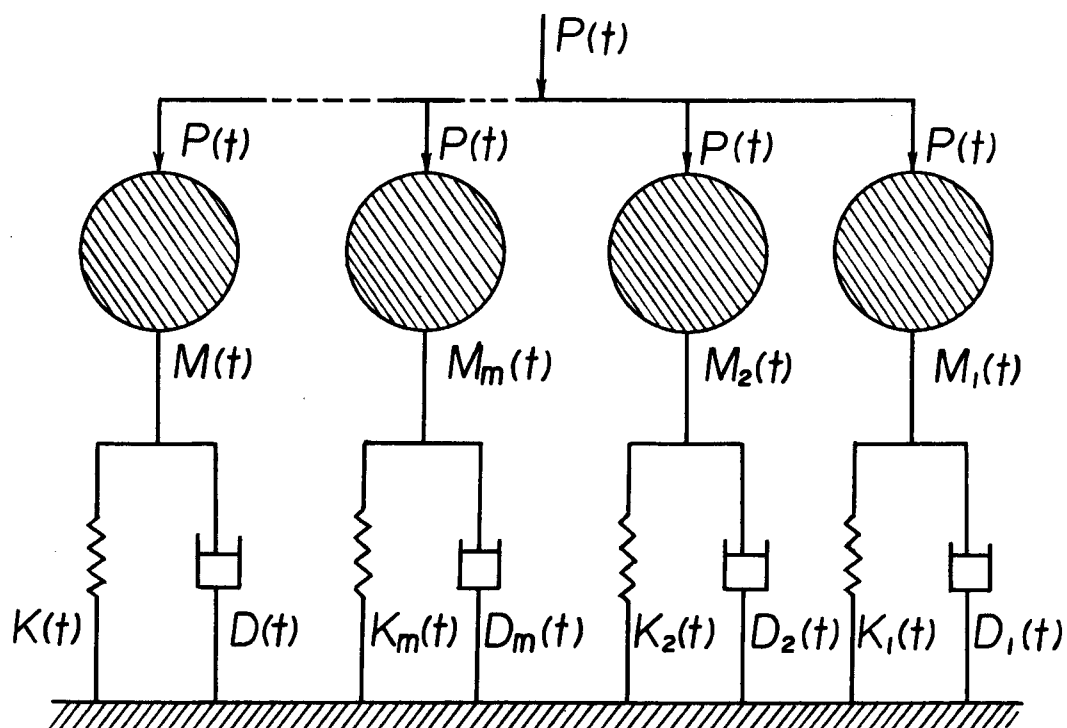


Fig. 2.2.5

ったならば、その動的レスポンスを決定する基礎式はすべて求められることを述べた。ここでは、これらの基礎式を使用して梁のレスポンスを求める基礎方程式を誘導することについて述べる。ただし、ここで取り扱う梁は簡単のために一様な断面を有するものとする。等断面梁の基礎微分方程式は簡単な偏微分方程式で与えられ、また固有振動数・振動モードも種々の境界条件を有するものについて得られているので、ここでは主としてそれらの固有振動数と振動モードについて述べれば充分と思う。なお最後に移動荷重をうける梁の理論式について述べ、若干の数値計算結果についてもふれた。

### 2.3. (ii) 等断面梁の固有振動数と振動モード

梁の自由振動の基礎微分方程式はよく知られているように式(2.3.1)で与えられる。

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (2.3.1)$$

ここに  $EI$  : はりの曲げ剛性

$\rho$  : はりの単位長さあたりの質量

振動モードを  $\varphi(x)$  とおいて

$$w = \varphi(x) \sin \omega t \quad (2.3.2)$$

の形を仮定し、これを式 (2.3.1) に代入する事により  $\varphi(x)$  を求めることができる。すなわち

$$\varphi(x) = C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x + C_3 \cosh \lambda x + C_4 \sinh \lambda x \quad (2.3.3)$$

ここに  $C_1, C_2, C_3, C_4$  は積分常数である。

$$\text{また} \quad \lambda^4 = \frac{W^2 \rho}{EI} \quad (2.3.4)$$

振動数方程式は境界条件を満足するように式 (2.3.3) を決定することにより求められる。種々の境界条件に対してこれらの解は求められているので、それを表にして示すと次のようになる。

### 振動数方程式

両端単純支持	$\omega_m = \left(\frac{m\pi}{l}\right)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho}}$
固定 - 固定 自由 - 自由	$\cos \lambda_m l \cosh \lambda_m l - 1 = 0$
固定 - 自由	$\cos \lambda_m l \cosh \lambda_m l + 1 = 0$
固定 - 単純支持 自由 - 単純支持	$\tan \lambda_m l = \tanh \lambda_m l.$

### 表 (2.3.1)

またこのときの正規化モード  $\Phi_m(x)$  は次表により与えられる。

正規化モード  $\Phi_m(x)$ 

両端単純支持	$\Phi_m(x) = \sqrt{\frac{2}{\rho l}} \sin \frac{m\pi x}{l} = \sqrt{\frac{2}{\rho l}} \sin \lambda_m x$
固定-固定	$\Phi_m(x) = \sqrt{\frac{1}{\rho l}} \left\{ \cosh \lambda_m x - \cos \lambda_m x - \sigma_m (\sinh \lambda_m x - \sin \lambda_m x) \right\}$
自由-自由	$\Phi_m(x) = \sqrt{\frac{1}{\rho l}} \left\{ \cosh \lambda_m x + \cos \lambda_m x - \sigma_m (\sinh \lambda_m x + \sin \lambda_m x) \right\}$ $\sigma_m = \frac{\cosh \lambda_m l - \cos \lambda_m l}{\sinh \lambda_m l - \sin \lambda_m l}$
固定-自由	$\Phi_m(x) = \sqrt{\frac{1}{\rho l}} \left\{ \cosh \lambda_m x - \cos \lambda_m x - \sigma_m (\sinh \lambda_m x - \sin \lambda_m x) \right\}$ $\sigma_m = \frac{\sinh \lambda_m l - \sin \lambda_m l}{\cosh \lambda_m l + \cos \lambda_m l}$
固定-単純支持	$\Phi_m(x) = \sqrt{\frac{1}{\rho l}} \left\{ \cosh \lambda_m x - \cos \lambda_m x - \sigma_m (\sinh \lambda_m x - \sin \lambda_m x) \right\}$
自由-単純支持	$\Phi_m(x) = \sqrt{\frac{1}{\rho l}} \left\{ \cosh \lambda_m x + \cos \lambda_m x - \sigma_m (\sinh \lambda_m x + \sin \lambda_m x) \right\}$ $\sigma_m = \cot \lambda_m l = \coth \lambda_m l$

表 (2.3.2)

## 2.3.(iii) 荷重を受ける梁の運動方程式

種々の境界条件を有する梁の固有振動数・振動モードは表 (2.3.1), (2.3.2) により求めることができるので, これらを 2.2 に述べた運動方程式中に入れるとそのレスポンスは求められることに

なる。上記の梁の中、単純梁が固有振動数・振動モードとも最も簡単によえられるものであり、また応用範囲も非常に広いものであるから、まずこれが種々の荷重を受ける場合の基礎式について述べ、次に梁の両端にせん断力・端モーメントが周期的に作用する場合について荷重と変形との関係を求めておく。

集中荷重  $P(t)$  が単純梁に作用するとき、その基礎方程式は式 (2.2.5), (2.2.14), (2.2.15), (2.2.16)

$$W = \sum_{m=1}^{\infty} W_m \quad (2.3.5)$$

$$\ddot{W}_m + \omega_m^2 W_m = \bar{\Phi}_m(x_i) \bar{\Phi}_m(x_j) P(t) \quad (2.3.6)$$

$$\theta = \sum_{m=1}^{\infty} \theta_m \quad (2.3.7)$$

$$\ddot{\theta}_m + \omega_m^2 \theta_m = \bar{\Phi}_m'(x_i) \bar{\Phi}_m(x_j) P(t) \quad (2.3.8)$$

ただし、 $x_i$  : 測定点の座標

$x_j$  : 荷重点の座標

を使用すると次式によりあらわされる。

$$W = \sum_{m=1}^{\infty} W_m \quad (2.3.9)$$

$$\ddot{W}_m + \omega_m^2 W_m = \frac{2}{Pl} \sin \frac{m\pi x_i}{l} \sin \frac{m\pi x_j}{l} \cdot P(t) \quad (2.3.10)$$

$$\theta = \sum_{m=1}^{\infty} \theta_m \quad (2.3.11)$$

$$\ddot{\theta}_m + \omega_m^2 \theta_m = \frac{2m\pi}{\rho l^2} \cos \frac{m\pi x_i}{l} \sin \frac{m\pi x_j}{l} \cdot p(t) \quad (2.3.12)$$

$$\therefore \omega_m = \left(\frac{m\pi}{l}\right)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho}}$$

荷重  $p(t)$  が一定周期力

$$p(t) = p_0 \sin \omega t \quad (2.3.13)$$

である場合には、式 (2.3.10), (2.3.12) は簡単に解けて次式となる。

$$\begin{aligned} W_m &= \frac{1}{\omega_m^2 - \omega^2} \cdot \Phi_m(x_i) \Phi_m(x_j) p_0 \sin \omega t \\ &= \frac{1}{\omega_m^2 - \omega^2} \cdot \frac{2}{\rho l} \sin \frac{m\pi x_i}{l} \sin \frac{m\pi x_j}{l} p_0 \sin \omega t \end{aligned} \quad (2.3.14)$$

$$\begin{aligned} \theta_m &= \frac{1}{\omega_m^2 - \omega^2} \cdot \Phi'_m(x_i) \Phi_m(x_j) p_0 \sin \omega t \\ &= \frac{1}{\omega_m^2 - \omega^2} \cdot \frac{2m\pi}{\rho l^2} \cdot \cos \frac{m\pi x_i}{l} \sin \frac{m\pi x_j}{l} \cdot p_0 \sin \omega t \end{aligned} \quad (2.3.15)$$

等分布荷重  $p_0 \sin \omega t$  が作用するとき、式 (2.2.28), (2.2.29) を使用して次式を得る。

$$\begin{aligned} W_m &= \frac{1}{\omega_m^2 - \omega^2} \cdot \Phi_m(x_i) \left[ \int_0^l \Phi_m(x) dx \right] p_0 \sin \omega t \\ &= \frac{1}{\omega_m^2 - \omega^2} \cdot \frac{4}{m\pi \rho} \sin \frac{m\pi x_i}{l} \cdot p_0 \sin \omega t \end{aligned} \quad (2.3.16)$$

$$\theta_m = \frac{1}{\omega_m^2 - \omega^2} \cdot \Phi'_m(x_i) \left[ \int_0^l \Phi_m(x) dx \right] \cdot p_0 \sin \omega t$$

$$= \frac{1}{\omega_m^2 - \omega^2} \cdot \frac{4}{\rho \ell} \cdot \cos \frac{m\pi x_i}{\ell} p_0 \sin \omega t \quad (2.3.17)$$

モーメント荷重  $M(t)$  が単純梁に作用するときは、式 (2.2.24), (2.2.25) すなわち

$$\ddot{w}_m + \omega_m^2 w_m = \Phi_m(x_i) \Phi'_m(x_j) M(t) \quad (2.3.18)$$

$$\ddot{\theta}_m + \omega_m^2 \theta_m = \Phi'_m(x_i) \Phi'_m(x_j) M(t) \quad (2.3.19)$$

により次式のように与えられる。

$$\ddot{w}_m + \omega_m^2 w_m = \frac{2m\pi}{\rho \ell^2} \sin \frac{m\pi x_i}{\ell} \cos \frac{m\pi x_j}{\ell} \cdot M(t) \quad (2.3.20)$$

$$\ddot{\theta}_m + \omega_m^2 \theta_m = \frac{2\pi^2 m^2}{\rho \ell^3} \cos \frac{m\pi x_i}{\ell} \cos \frac{m\pi x_j}{\ell} \cdot M(t) \quad (2.3.21)$$

さらに  $M(t)$  が一定周期モーメント

$$M(t) = M_0 \sin \omega t$$

の場合には

$$\begin{aligned} w_m &= \frac{1}{\omega_m^2 - \omega^2} \Phi_m(x_i) \Phi'_m(x_j) M_0 \sin \omega t \\ &= \frac{1}{\omega_m^2 - \omega^2} \cdot \frac{2m\pi}{\rho \ell^2} \sin \frac{m\pi x_i}{\ell} \cos \frac{m\pi x_j}{\ell} \cdot M_0 \sin \omega t \quad (2.3.22) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \theta_m &= \frac{1}{\omega_m^2 - \omega^2} \cdot \Phi'_m(x_i) \Phi'_m(x_j) M_0 \sin \omega t \\ &= \frac{1}{\omega_m^2 - \omega^2} \cdot \frac{2\pi^2 m^2}{\rho \ell^3} \cdot \cos \frac{m\pi x_i}{\ell} \cos \frac{m\pi x_j}{\ell} \cdot M_0 \sin \omega t \quad (2.3.23) \end{aligned}$$

となる。

はりの両端に周期力  $M_{AB} \sin \omega t$ ,  $M_{BA} \sin \omega t$ ,  $Q_{AB} \sin \omega t$ ,  $Q_{BA} \sin \omega t$  が作用し, 材端には図 2.3.1 に示す変形が生じたとする。 $W_A$ ,  $W_B$  は材端の変位で  $\theta_A$ ,  $\theta_B$  は材端の撓み角である。これより式 (2.3.3) の積分常数  $C_1, C_2, C_3, C_4$  を決定すれば, 荷重と変形との関係は次式によりあらわされる。<sup>25)</sup>

$$\frac{M_{AB}}{2EI} = \frac{\lambda}{\Delta} (\sin \lambda \ell \cosh \lambda \ell - \cos \lambda \ell \sinh \lambda \ell) \theta_A + \frac{\lambda}{\Delta} (\sinh \lambda \ell - \sin \lambda \ell) \theta_B \\ - \frac{\lambda^2 \ell}{\Delta} \sin \lambda \ell \sinh \lambda \ell \cdot W_A + \frac{\lambda^2}{\Delta} (\cosh \lambda \ell - \cos \lambda \ell) W_B$$

$$\frac{M_{BA}}{2EI} = \frac{\lambda}{\Delta} (\sinh \lambda \ell - \sin \lambda \ell) \theta_A + \frac{\lambda}{\Delta} (\sin \lambda \ell \cosh \lambda \ell - \cos \lambda \ell \sinh \lambda \ell) \theta_B \\ - \frac{\lambda^2}{\Delta} (\cosh \lambda \ell - \cos \lambda \ell) W_A + \frac{\lambda^2}{\Delta} \sin \lambda \ell \sinh \lambda \ell \cdot W_B$$

$$\frac{Q_{AB}}{2EI} = -\frac{\lambda^2}{\Delta} \sin \lambda \ell \sinh \lambda \ell \cdot \theta_A - \frac{\lambda^2}{\Delta} (\cosh \lambda \ell - \cos \lambda \ell) \theta_B + \frac{\lambda^3}{\Delta} (\sin \lambda \ell \cdot \\ \cosh \lambda \ell + \cos \lambda \ell \sinh \lambda \ell) W_A - \frac{\lambda^3}{\Delta} (\sinh \lambda \ell + \sin \lambda \ell) W_B$$

$$\frac{Q_{BA}}{2EI} = -\frac{\lambda^2}{\Delta} (\cosh \lambda \ell - \cos \lambda \ell) \theta_A - \frac{\lambda^2}{\Delta} \sin \lambda \ell \sinh \lambda \ell \cdot \theta_B + \frac{\lambda^3}{\Delta} (\sinh \lambda \ell \\ + \sin \lambda \ell) W_A - \frac{\lambda^3}{\Delta} (\sin \lambda \ell \cosh \lambda \ell + \cos \lambda \ell \sinh \lambda \ell) W_B$$

----- (2.3.24)

ここに



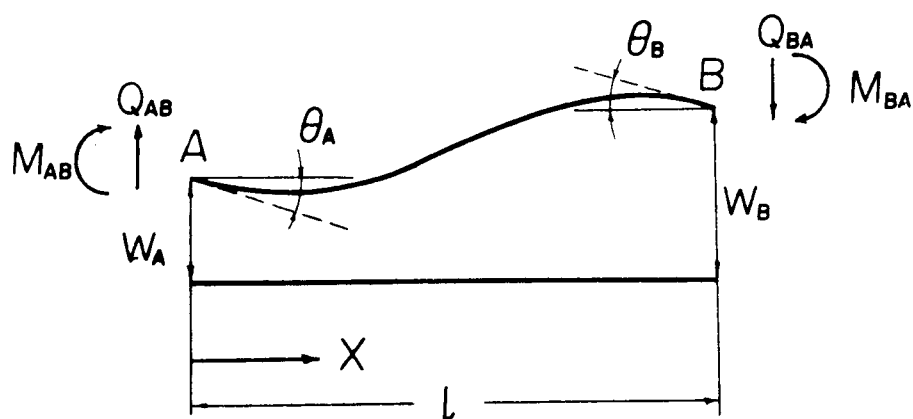


Fig. 2.3.1

$$\Delta = 2(1 - \cos \lambda \ell \cosh \lambda \ell)$$

式(2.3.24)は振動撓角法の基本式である。

### 2.3.(iv) 移動荷重をうける梁の運動方程式

さきに構造物が移動荷重をうける時、その運動方程式は式(2.2.18)

$$\ddot{w}_m + \omega_m^2 w_m = \Phi_m(x_i) \Phi_m\{x_j(t)\} P(t) \quad (2.3.25)$$

により与えられることを述べた。種々の境界条件を有する梁の固有振動数と振動モードは表(2.3.1), (2.3.2)に与えられているのでこれらを使用すれば基礎式は直ちにたてられるけれども、ここでは単純梁の基礎式について若干の考察を行ってみよう。単純梁の場合、式(2.3.25)は

$$\ddot{w}_m + \omega_m^2 w_m = \frac{2}{M} \sin \frac{m\pi x_i}{\ell} \sin \frac{m\pi x_j(t)}{\ell} \cdot P(t) \quad (2.3.26)$$

ここに  $M = P\ell$  : 梁の全質量

となるが、これは常数を係数とする2階の微分方程式であるから比較的簡単に解くことができる。式(2.3.26)の解を求めると、速度が変化する荷重に対してLowanが梁の微分方程式式(2.3.1)をLaplace変換により直接解いて得た結果<sup>2)</sup>と一致する。また式(2.3.26)において一定力 $P_0$ が一定速度で移動する場合

合の解を求めると, Timoshenko が Lagrange の運動方程式を使用して得た解と一致する<sup>26)</sup>.

荷重が単純梁上を移動する時, 任意の測点  $x_i$  のレスポンスは式 (2.3.26) の解の和として求めることができるが, 特別な場合として一定力  $P_0$  が任意の速度で移動する場合について考えてみる<sup>23)</sup>. このとき式 (2.3.26) の右辺によって解が変化するため, 簡単のために  $m=1$  の場合のみについて考え, 荷重  $P_0$  の大きさは

$$\frac{2P_0}{M} \left| \sin \frac{\pi x_i}{\ell} \right|_{x_i = \ell/2} = 1$$

により決定し, また

$$A_j(t) = \sin \frac{\pi x_j(t)}{\ell}$$

と略記すれば, 式 (2.3.26) は式 (2.3.27) となる.

$$\ddot{w}_i + \omega_i^2 w_i = A_j(t) \quad (2.3.27)$$

自動車の速度変化については種々の場合が考えられるが, ここでは特別の場合として, 自動車の加速度が一定の場合について考えてみる. 名神高速道路山科地区において高速度で乗用車を走行させ, その急停車時におけるタイヤのスリップ破損の試験を行っているが, その際自動車の加速度の

変化をも記録している(図-2.3.2)。この測定記録によると、自動車の加速度はほとんど一定と考えられるから、自動車がこのような急停車、または増速を橋梁上で行なうことを想定してみよう。

荷重が $Q$ の地点より、初速度 $v_0$ 、加速度 $\pm a$ で移動を開始したとすると、 $A_j(t)$ は次式となる。

$$A_j(t) = \sin(\alpha Q + \alpha v_0 t \pm 0.5 \alpha a t^2)$$

ここに  $\alpha = m\pi/\ell$

$A_j(t)$ が上式のような関数で表わされる場合には、式(2.3.27)は簡単に解くことができないので、 $A_j(t)$ をつきに示すようにフーリエ級数に展開する。

$$t^2 = \frac{\pi^2}{4} - \frac{8}{\pi} \left( \cos t - \frac{\cos 3t}{3^3} \right)$$

$$\cos(x \sin \theta) = J_0(x) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} J_{2k}(x) \cos 2k\theta$$

$$\sin(x \sin \theta) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} J_{2k-1}(x) \sin(2k-1)\theta$$

$$\cos(x \cos \theta) = J_0(x) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k J_{2k}(x) \cos 2k\theta$$

$$\sin(x \cos \theta) = 2 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k J_{2k+1}(x) \cos(2k+1)\theta$$

ここに、 $J_n(x)$ はBessel関数である。

ゆえに  $A_j(t)$ は次式となる。

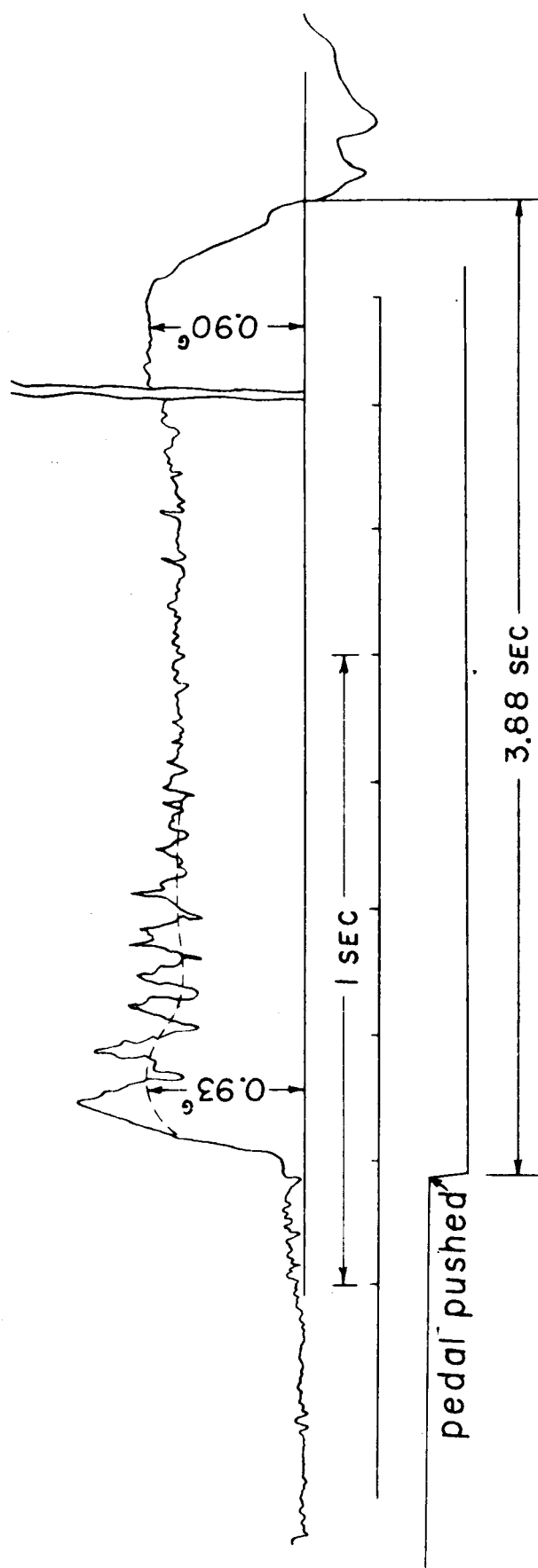


Fig. 2.3.3.2

$$\begin{aligned}
 A_j(t) \doteq & a_0 \sin(d' + N_0 t) + \sum_{n=1}^6 a_{2n} \{ \sin(d' + N_{2n} t) + \sin(d' + N'_{2n} t) \} \\
 & + \sum_{n=1}^6 a_{2n-1} \{ \cos(d' + N_{2n-1} t) + \cos(d' + N'_{2n-1} t) \} \\
 & \text{-----} \quad (2.3.28)
 \end{aligned}$$

$\equiv \equiv 12$

$$a_0 = J_0(c_1) J_0(b_1) - 2 J_1(c_1) J_3(b_1)$$

$$a_2 = -J_0(c_1) J_2(b_1) + J_1(c_1) J_1(b_1) + J_1(c_1) J_5(b_1)$$

$$a_4 = J_0(c_1) J_4(b_1) + J_1(c_1) J_1(b_1) - J_1(c_1) J_7(b_1)$$

$$a_6 = -J_0(c_1) J_6(b_1) - J_1(c_1) J_3(b_1) + J_1(c_1) J_9(b_1)$$

$$a_8 = J_0(c_1) J_8(b_1) + J_1(c_1) J_5(b_1)$$

$$a_{10} = -J_1(c_1) J_7(b_1)$$

$$a_{12} = J_1(c_1) J_9(b_1)$$

$$a_1 = -J_0(c_1) J_1(b_1) - J_1(c_1) J_2(b_1) + J_1(c_1) J_4(b_1)$$

$$a_3 = J_0(b_1) J_1(c_1) + J_0(c_1) J_3(b_1) - J_1(c_1) J_6(b_1)$$

$$a_5 = -J_0(c_1) J_5(b_1) - J_1(c_1) J_2(b_1) + J_1(c_1) J_8(b_1)$$

$$a_7 = J_0(c_1) J_7(b_1) + J_1(c_1) J_4(b_1)$$

$$a_9 = -J_0(c_1) J_9(b_1) - J_1(c_1) J_6(b_1)$$

$$a_{11} = J_1(c_1) J_8(b_1)$$

$$d' = d a + d u t_0^2 / 8, \quad N_n = d v_0 + n \pi / t_0$$

$$b_1 = 4 d u t_0^2 / \pi^3, \quad N'_n = d v_0 - n \pi / t_0$$

$$c_1 = b_1 / 27, \quad t / t_0 \leq 1/2$$

$t_0$ : 規準時間で演算時間  $t$  の大きさによって決定する  
 式 (2.3.27) の右辺が式 (2.3.28) にて与えられ, 初期条件が  
 $t=0$  において,  $w_1=0$ ,  $\dot{w}_1=0$  である場合には, 式 (2.3.  
 27) の解  $w_1$  は式 (2.3.29) にて与えられる。

$$\begin{aligned}
 w_1 = & \frac{a_0 \sin(d' + N_0 t)}{\omega_1^2 - N_0^2} + \sum_{n=1}^6 a_{2n} \left[ \frac{\sin(d' + N_{2n} t)}{\omega_1^2 - N_{2n}^2} + \frac{\sin(d' + N'_{2n} t)}{\omega_1^2 - N_{2n}^2} \right] \\
 & + \sum_{n=1}^6 a_{2n-1} \left[ \frac{\cos(d' + N_{2n-1} t)}{\omega_1^2 - N_{2n-1}^2} + \frac{\cos(d' + N'_{2n-1} t)}{\omega_1^2 - N_{2n-1}^2} \right] \\
 & - \cos \omega_1 t \left\{ \sin d' \left\{ \frac{a_0}{\omega_1^2 - N_0^2} + \sum_{n=1}^6 a_{2n} \left( \frac{1}{\omega_1^2 - N_{2n}^2} + \frac{1}{\omega_1^2 - N_{2n}^2} \right) \right\} \right. \\
 & \left. + \cos d' \sum_{n=1}^6 a_{2n-1} \left( \frac{1}{\omega_1^2 - N_{2n-1}^2} + \frac{1}{\omega_1^2 - N_{2n-1}^2} \right) \right\} \\
 & - \frac{\sin \omega_1 t}{\omega_1} \left\{ \cos d' \left\{ \frac{a_0 N_0}{\omega_1^2 - N_0^2} + \sum_{n=1}^6 a_{2n} \left( \frac{N'_{2n}}{\omega_1^2 - N_{2n}^2} + \frac{N'_{2n}}{\omega_1^2 - N_{2n}^2} \right) \right\} \right. \\
 & \left. - \sin d' \sum_{n=1}^6 a_{2n-1} \left( \frac{N'_{2n-1}}{\omega_1^2 - N_{2n-1}^2} + \frac{N'_{2n-1}}{\omega_1^2 - N_{2n-1}^2} \right) \right\} \dots\dots (2.3.29)
 \end{aligned}$$

自動車のように複雑な振動系を持つ荷重が移動する場合  
 は式 (2.3.26) の荷重  $P(t)$  を慣性力で置き換えればよい。  
 移動荷重がバネ下質量  $m_1$ , バネ上質量  $m_2$ , バネ常数

長なる振動系からできている場合、その運動方程式は式 (2.2.20) を使用すると

$$m_2 \ddot{V}_2 = -k(V_2 - V_1) + m_2 g$$

$$m_1 \ddot{V}_1 = k(V_2 - V_1) + m_1 g - X$$

$$V_1 = \sum_{m=1}^{\infty} \left[ W_m \frac{\sin(m\pi x_j(t)/l)}{\sin(m\pi x_i/l)} \right] \quad (2.3.30)$$

$$\ddot{W}_m + \omega_m^2 W_m = \frac{2}{M} \sin \frac{m\pi x_i}{l} \cdot \sin \frac{m\pi x_j(t)}{l} \cdot X$$

$$(m=1, 2, 3, \dots, \infty)$$

により与えられる。上式は多変連立微分方程式であるから、通常の方法によっては簡単に解くことができないが、特別な場合として機関車(質量 $m_1$ )が単純梁上を一定速度( $V$ )で移動する場合について考えてみる。この場合には式(2.3.30)において

$$m_2 = k = V_2 = 0$$

とおけばよい。この式は国井博士がLagrangeの運動方程式を用いて誘導した基礎式<sup>27)</sup>において、機関車のハンマーカを無視した場合と一致する。また式(2.3.30)は、2つの質量



をバネで連結した単純な振動系からできている移動荷重が作用する時の基礎式であるが、荷重がクーロン摩擦などの非線型要素をもつ場合、またはもっと複雑な振動系からできている場合でも、同様な手法により運動方程式は簡単に誘導できる。

### 2.3.(V) 数値計算<sup>23)</sup> (移動荷重をうける梁の動的レスポンス)

2.3 (iv) に述べたように、荷重が速度を変化させながら橋梁上を移動するとき、任意の点に生じるたわみ  $w_1$  は式 (2.29) にて求めることができるわけであるが、実在橋に対して荷重の加速度の大きさがどの程度衝撃率に影響を与えるかを調べるために、数値計算を行なってみた。計算例として取り扱った橋梁は、昭和32年に大阪市に架設された長浜川新橋である。この橋は、桁高を極端に小さくすることと要求されているために、中空板構造の方式をとっている。この橋の諸定数は下記に示すとおり。

スパン  $l = 30.6 (m)$ , 固有振動数  $\omega_1 = 17.93 (rad/sec)$ ,  
全重量  $W = 321.9 (t)$ , 曲げ剛性  $EI = 3.107 \times 10^{13} (kg \cdot cm^2)$

荷重の速度変化としては、増速・減速の2つの場合が考えられるが、実際の問題として自動車が増速する場合の

加速度の値は比較的小さい。これに反して減速の場合には、急停止・衝突の場合などが考えられるから、加速度がかなり大きい値をとることが予想されるので数値計算は主として後者について行なった。また自動車の減速は任意の点から開始してよいのであるが、ここでは荷重が橋梁に入った瞬間から減速をはじめると仮定して計算を行なった。

たわみの測定点は  $l/2$  点とし、 $P_0 = 164.2 \text{ kg}$  の一定荷重が移動する場合について計算を行なった。式 (2.3.29) の計算を行なうにはかなりの労力を要するので、計算はすべて Digital Computer の力を借りた。また式 (2.3.28) による  $A_j(t)$  の展開の際には、誤差が 2% 以内となる項数までとった。式 (2.3.27) の右辺  $A_j(t)$  の関数によってたわみの振動状態が決定するので、自動車が増速または減速する場合、加速度の大きさに対して、この  $A_j(t)$  がどのように変化するかを図-2.3.3, 図-2.3.4 に示す。荷重が初速度  $20 \text{ m/sec}$ ,  $30 \text{ m/sec}$  で橋梁内に入ってきて一様加速度で減速するとき、 $l/2$  点のレスポンスを図-2.3.5, 図-2.3.6 に示した。

図-2.3.5, 図-2.3.6 からわかるように、等速度で荷重が移動する場合と比較するとき、最大たわみは荷重が初速度

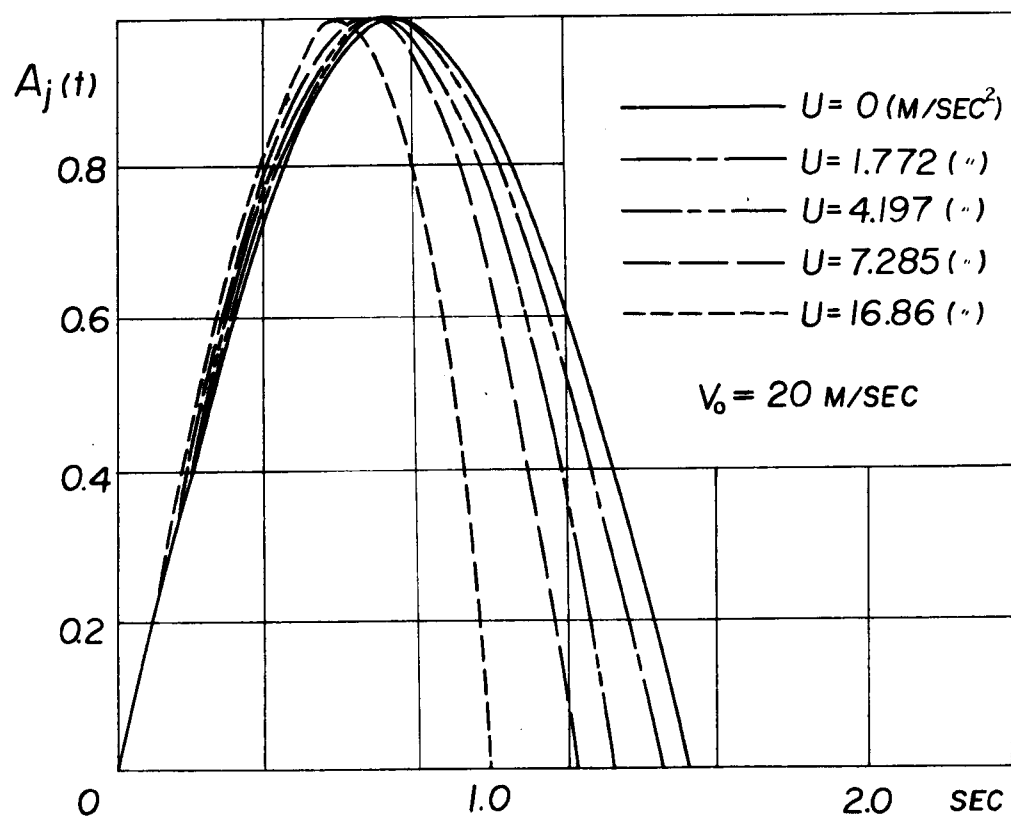


Fig. 2.3.3

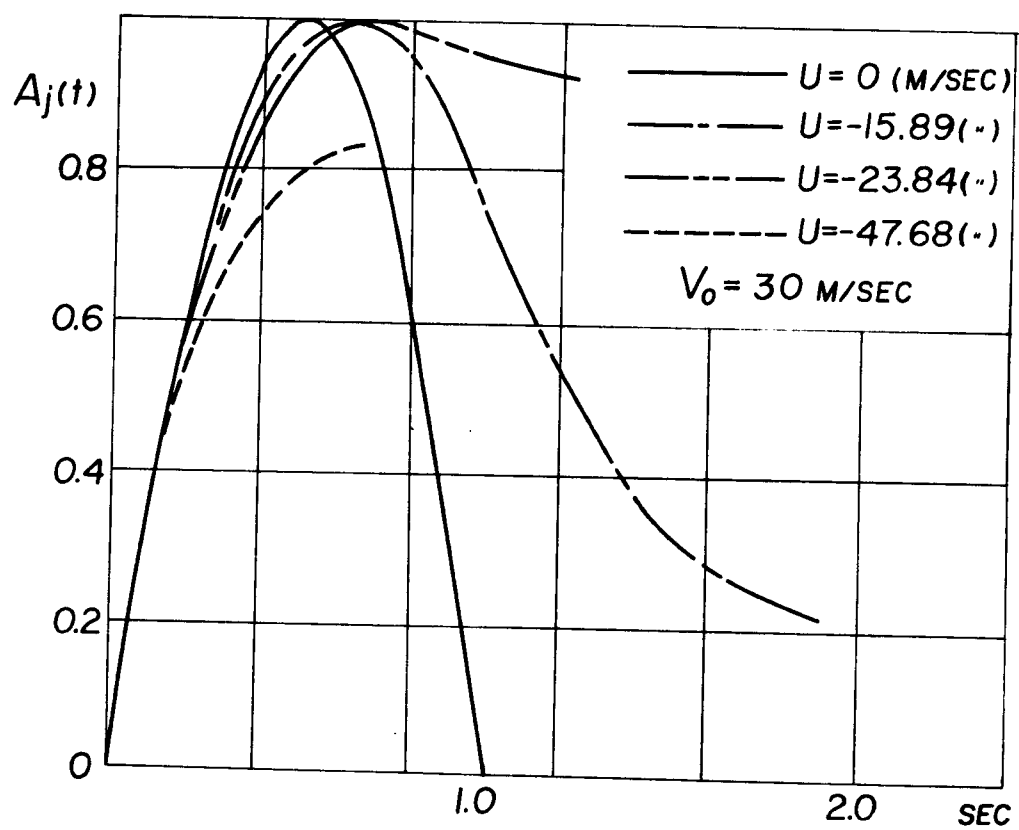


Fig. 2.3.4

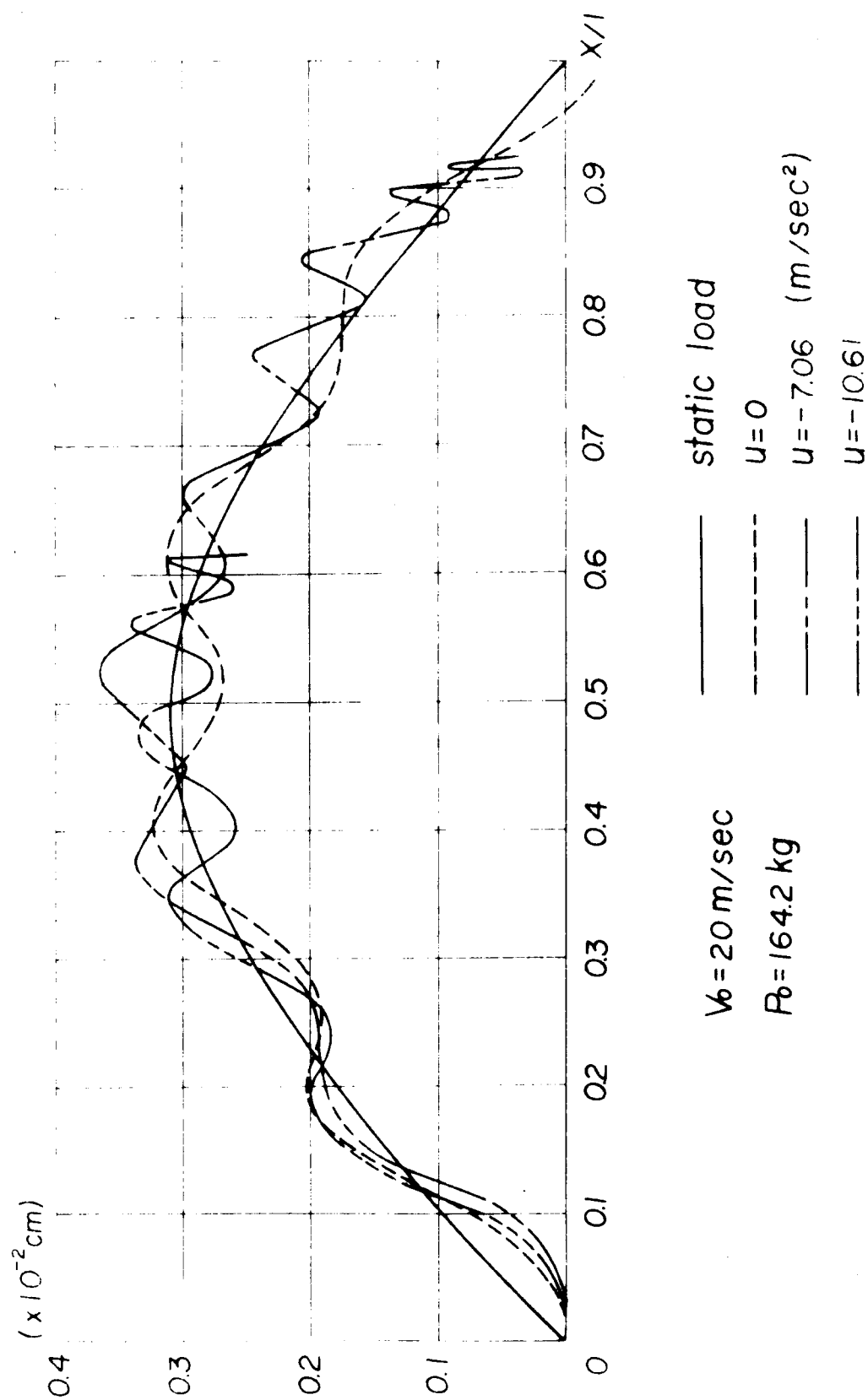


Fig. 2.3.5

Dynamic deflection diagrams at the center of the span

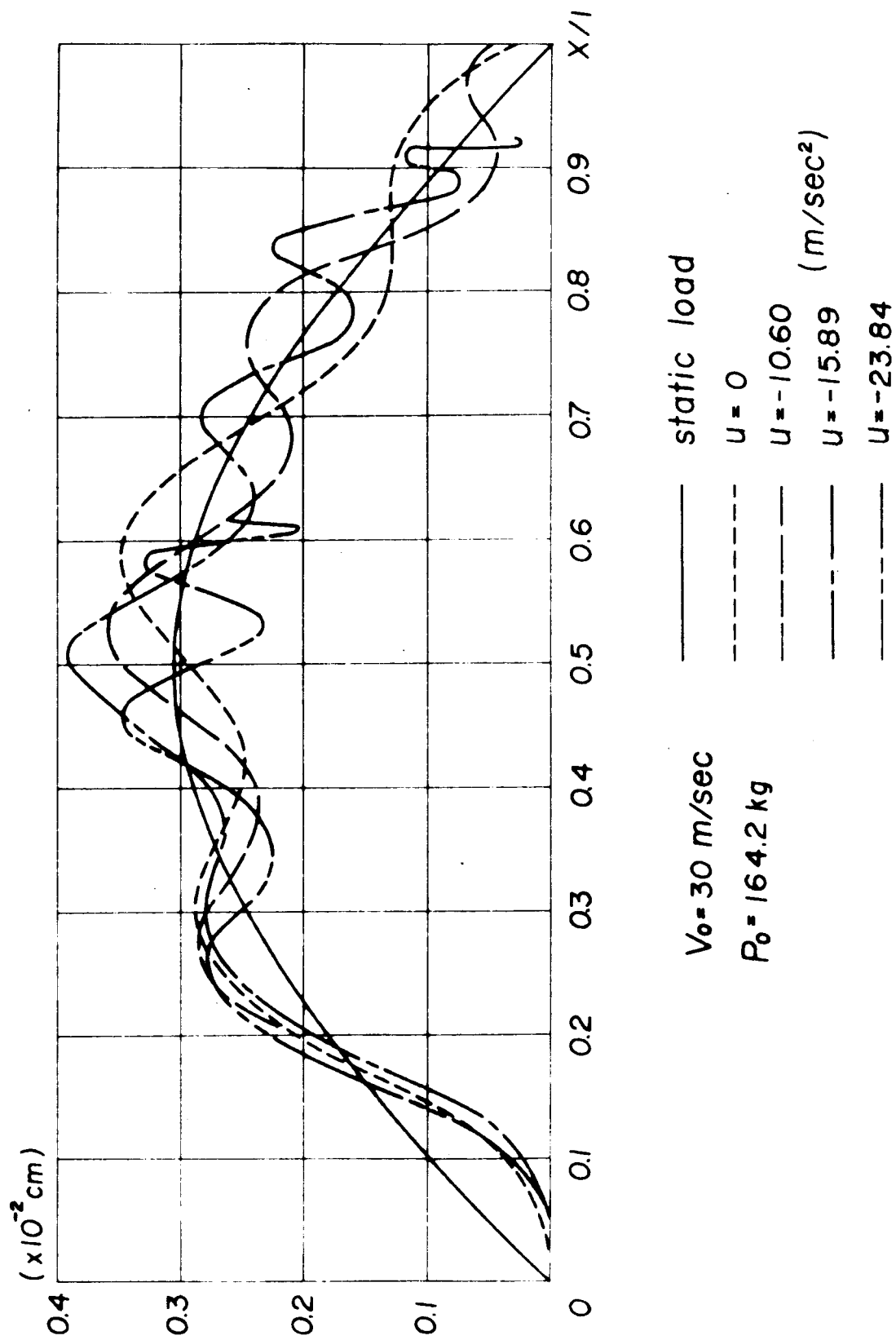


Fig. 2.3.6 Dynamic deflection diagrams at the center of the span

20 m/sec (72 km/h) にて橋梁に入る場合 10~12% 程度増加し、初速度 30 m/sec (108 km/h) の場合には 10~15% 程度増加している。しかし、加速度の大きさが大きいときに最大たわみが生じるわけではなく、20 m/sec の初速度を持つ場合には  $\mu = -7.064$  m/sec<sup>2</sup>、初速度 30 m/sec の場合には  $\mu = -15.89$  m/sec<sup>2</sup> のときに生じており、これより加速度が大きくなるとたわみはむしろ減少する傾向にある。図-2.3.2 に示す乗用車の加速度の測定記録は急停止する場合のものであるが、この測定記録では加速度はほぼ 1~0.9g の範囲にあると考えられるから、このような急停止を橋梁上で行なった場合にはほぼ最大のたわみが生じると考えてよい。この計算ではすべて荷重がスパンに入った瞬間から減速すると仮定して計算を行なっているから、荷重がスパン内の任意の点で減速を開始した場合には、さらに大きい撓みを得られるかもしれないが、あまり大きい値になることは期待できないと思う。

## 2.4 直交異方性板の運動方程式と動的レスポンス

### 2.4.1 緒言

構造物の中には、板と見なして解析できるものが少なくない

が、それらは剛性の種類により等方性板・直交異方性板・斜交異方性板と区別され、その基礎微分方程式もそれぞれ異なっている。板はこのように基礎微分方程式が異なる以外に、形状も矩形・平行四辺形・円形と変化する、さらに境界条件も数多くの組み合わせ可能な変化するものであるけれども、それらの中簡単に直接解の得られるものは少ない。特に動的解の得られるものは僅かであるので、ここでは一様な直交異方性矩形板を対象とし、その境界条件も理論解の求め易い四辺単純支持または相対2辺単純支持2辺自由の2種のものについて述べることにする。これらの運動方程式の誘導には梁の場合と同様固有振動数・振動モードを必要とするので、まずこの両者を決定する基礎式を導き、しかる後動的な外力に対するレスポンスを求める運動方程式について述べる。なお最後に巾員の大きい橋を直交異方性板と見なし、この上を一定荷重が一定速度で移動する場合について数値計算を行ない、荷重の走行位置・測定点の選び方により振動性状が大きく変化することを示した。

#### 2.4.2 四辺単純支持された直交異方性板の運動方程式

自由振動時における直交異方性板の基礎微分方程式は



周知の式 (2.4.2.1) にて与えられる。

$$D_x \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2H \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} + \rho \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = 0 \quad (2.4.2.1)$$

$$\text{ここに } 2H = \nu_x D_y + \nu_y D_x + 4C, \quad 2C = (1 - \sqrt{\nu_x \nu_y}) \sqrt{D_x D_y}$$

$$D_x = \frac{(EI)_x}{1 - \nu_x \nu_y}, \quad D_y = \frac{(EI)_y}{1 - \nu_x \nu_y}$$

$D_x$  :  $x$  軸方向の板剛度

$D_y$  :  $y$  軸方向の板剛度

$\nu_x$  :  $x$  軸方向のポアソン比

$\nu_y$  :  $y$  軸方向のポアソン比

$\rho$  : 単位面積あたりの質量

式 (2.4.2.1) において

$$W = w(x, y) \sin \omega_n t \quad (2.4.2.2)$$

とおいて変形すると次式を得る。

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\kappa \sqrt{\frac{D_y}{D_x}} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{D_y}{D_x} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} - \frac{\rho \omega_n^2}{D_x} w = 0 \quad (2.4.2.3)$$

$$\text{ここに } \kappa = H / \sqrt{D_x D_y}$$

いま図-2.4.2.1のように座標軸をとると単純支持の境界条件は次のように与えられる。

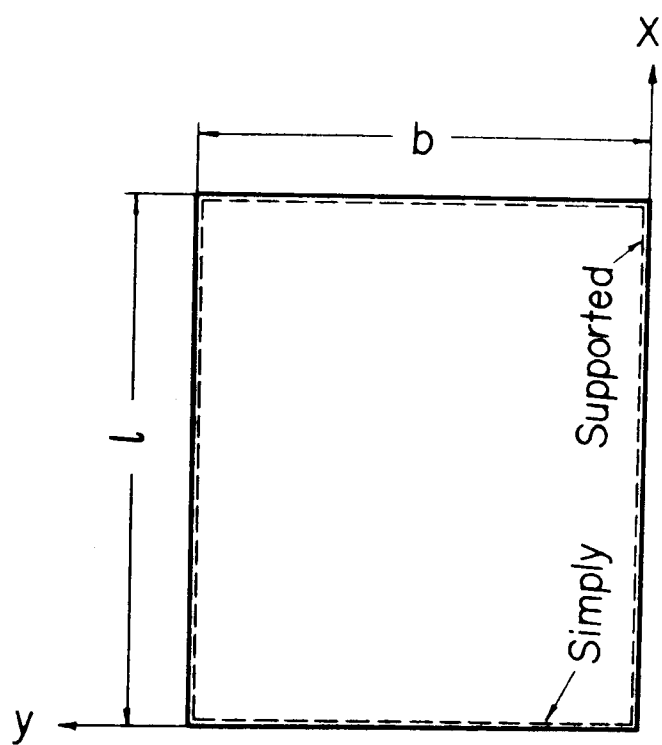


Fig.2.4.2.1

$x=0, x=l$  において

$$\left. \begin{aligned} W &= 0 \\ M_x &= -D_x \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \nu_y \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.4.2.4)$$

$y=0, y=b$  において

$$\left. \begin{aligned} W &= 0 \\ M_y &= -D_y \left( \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \nu_x \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.4.2.5)$$

上の境界条件をみたす解として式 (2.4.2.6) を考える。

$$\varphi_{mm'}(x, y) = C_{mm'} \sin \frac{m\pi x}{l} \cdot \sin \frac{m'\pi y}{b} \quad (2.4.2.6)$$

ここに  $m, m'$  はそれぞれ  $x, y$  軸方向の振動次数である。

式 (2.4.2.6) はすでに式 (2.4.2.4), (2.4.2.5) の境界条件を満足しているから振動モードを表わす関数である。また固有振動数  $\omega_n$  は式 (2.4.2.6) を式 (2.4.2.3) に代入することにより決定できる。すなわち

$$\omega_n^2 = \omega_{mm'}^2 = \frac{D_x}{\rho} \cdot \left( \frac{\pi}{l} \right)^4 \left\{ m^4 + 2m^2 m'^2 \kappa \sqrt{\frac{D_y}{D_x}} \left( \frac{l}{b} \right)^2 + m'^4 \frac{D_y}{D_x} \left( \frac{l}{b} \right)^4 \right\} \quad \text{-----} (2.4.2.7)$$

ここに  $m, m' = 1, 2, 3, \dots$

式 (2.4.2.6) により与えられる振動モードはその振中の大きさを自由に選択できるから、後の解析が簡単に表現で

きよう正規化条件式 式 (2.2.1)

$$C_{mm'}^2 \int \rho \varphi_{mm'}^2(x, y) dx dy = 1 \quad (2.4.2.8)$$

を満足するように  $C_{mm'}$  を決定し, この正規化した振動モードを  $\Phi_{mm'}(x, y)$  と書くと, これは次式により示される.

$$\Phi_{mm'}(x, y) = \bar{\Phi}_m(x) \cdot \bar{\Phi}_{m'}(y) = \frac{2}{\sqrt{M}} \sin \frac{m\pi x}{\ell} \cdot \sin \frac{m'\pi y}{b} \quad (2.4.2.9)$$

$$\text{ここに } \bar{\Phi}_m(x) = \left(\frac{2}{\sqrt{M}}\right)^{1/2} \sin \frac{m\pi x}{\ell}, \quad \bar{\Phi}_{m'}(y) = \left(\frac{2}{\sqrt{M}}\right)^{1/2} \sin \frac{m'\pi y}{b}$$

$M$ : 板の全質量 ( $M = \rho \ell b$ )

一たん固有振動数・振動モードが決定されたならば, 2.2 に述べた理論により種々の動的荷重が作用する時のレスポンスが次のように与えられる.

すなわち, 撓みのレスポンスを

$$w = \sum_m \sum_{m'} w_{mm'} \quad (2.4.2.10)$$

$x, y$  軸方向の撓み角のレスポンスをそれぞれ  $\theta_x, \theta_y$  とし,

$$\left. \begin{aligned} \theta_x &= \sum_m \sum_{m'} \theta_{xmm'} \\ \theta_y &= \sum_m \sum_{m'} \theta_{ymmm'} \end{aligned} \right\} \quad (2.4.2.11)$$

によりあらわすと, 各振動次数 ( $m, m'$ ) に対するそれらの運

動方程式は以下のようになる。

(i) 集中荷重  $P(t)$  が作用する場合

$$\ddot{w}_{mm'} + \omega_{mm'}^2 w_{mm'} = \bar{\Phi}_{mm'}(x_i, y_i) \bar{\Phi}_{mm'}(x_j, y_j) P(t) \cdots (2.4.2.12)$$

$$\ddot{\theta}_{xmm'} + \omega_{mm'}^2 \theta_{xmm'} = \bar{\Phi}_m'(x_i) \bar{\Phi}_m'(y_i) \bar{\Phi}_{mm'}(x_j, y_j) P(t) \cdots (2.4.2.13)$$

$$\ddot{\theta}_{ymm'} + \omega_{mm'}^2 \theta_{ymm'} = \bar{\Phi}_m(x_i) \bar{\Phi}_m'(y_i) \bar{\Phi}_{mm'}(x_j, y_j) P(t) \cdots (2.4.2.14)$$

ここに  $(x_i, y_i)$  : 測定点の座標

$(x_j, y_j)$  : 荷重点の座標

(ii) 集中荷重  $P(t)$  が移動する場合

$$\ddot{w}_{mm'} + \omega_{mm'}^2 w_{mm'} = \bar{\Phi}_{mm'}(x_i, y_i) \bar{\Phi}_{mm'}\{x_j(t), y_j(t)\} P(t) \cdots (2.4.2.15)$$

ここに  $x_j(t), y_j(t)$  は荷重の走行位置を時間の関数としてあらわしたものである。

$$\ddot{\theta}_{xmm'} + \omega_{mm'}^2 \theta_{xmm'} = \bar{\Phi}_m'(x_i) \bar{\Phi}_m'(y_i) \bar{\Phi}_{mm'}\{x_j(t), y_j(t)\} P(t) \cdots (2.4.2.16)$$

$$\ddot{\theta}_{ymm'} + \omega_{mm'}^2 \theta_{ymm'} = \bar{\Phi}_m(x_i) \bar{\Phi}_m'(y_i) \bar{\Phi}_{mm'}\{x_j(t), y_j(t)\} P(t) \cdots (2.4.2.17)$$

(iii) 分布荷重  $p(x, y, t)$  が作用する場合

$$\ddot{w}_{mm'} + \omega_{mm'}^2 w_{mm'} = \bar{\Phi}_{mm'}(x_i, y_i) \left[ \int \bar{\Phi}_{mm'}(x, y) p(x, y, t) dx dy \right] \quad \text{-----} (2.4.2.18)$$

$$\ddot{\theta}_{xmm'} + \omega_{mm'}^2 \theta_{xmm'} = \bar{\Phi}'_m(x_i) \bar{\Phi}_{m'}(y_i) \left[ \int \bar{\Phi}_{mm'}(x, y) p(x, y, t) dx dy \right] \quad \text{-----} (2.4.2.19)$$

$$\ddot{\theta}_{ymm'} + \omega_{mm'}^2 \theta_{ymm'} = \bar{\Phi}_m(x_i) \bar{\Phi}'_{m'}(y_i) \left[ \int \bar{\Phi}_{mm'}(x, y) p(x, y, t) dx dy \right] \quad \text{-----} (2.4.2.20)$$

(iv) モーメント荷重  $M(t)$  が作用する場合

モーメント荷重の  $x, y$  軸方向の成分をそれぞれ  $M_x(t)$ ,  $M_y(t)$  とあらわせば,  $(x_j, y_j)$  点に作用する一般のモーメント荷重  $M(t)$  はこれらの和として与えられる。すなわち

$$M(t) = \alpha M_x(t) + \beta M_y(t) \quad (2.4.2.21)$$

モーメント荷重をこのように  $x, y$  軸成分に分解できると式 (2.2.24), (2.2.25) の関係が使用できて, 撓みおよび撓み角を求める基礎式は次のように示される。

$$\ddot{w}_{mm'} + \omega_{mm'}^2 w_{mm'} = \bar{\Phi}_{mm'}(x_i, y_i) \left[ \alpha \bar{\Phi}'_m(x_j) \bar{\Phi}_{m'}(y_j) M_x(t) + \beta \bar{\Phi}_m(x_j) \bar{\Phi}'_{m'}(y_j) M_y(t) \right] \quad \text{-----} (2.4.2.22)$$

$$\ddot{\theta}_{xmm'} + \omega_{mm'}^2 \theta_{xmm'} = \bar{\Phi}'_m(x_i) \bar{\Phi}_{m'}(y_i) \left[ \alpha \bar{\Phi}'_m(x_j) \bar{\Phi}_{m'}(y_j) M_x(t) + \beta \bar{\Phi}_m(x_j) \bar{\Phi}'_{m'}(y_j) M_y(t) \right] \quad \text{-----} (2.4.2.23)$$

$$\ddot{\theta}_{ymm'} + \omega_{mm'}^2 \theta_{ymm'} = \bar{\Phi}_m(x_i) \bar{\Phi}'_{m'}(y_i) \left[ \alpha \bar{\Phi}'_m(x_j) \bar{\Phi}_{m'}(y_j) M_x(t) \right]$$

$$+ \beta \Phi_m(x_j) \Phi'_m(y_j) M_y(t) \dots (2.4.2.24)$$

### (V) 周期力が作用する場合

上記の荷重が一定周期力である場合式(2.4.2.12)~(2.4.2.24)の定常解は容易に求めることができる。いま周期力の振動数を  $\omega$  とし、

$$\Omega_{mm'} = 1/(\omega_{mm'}^2 - \omega^2)$$

と書けば、定常レスポンスは次のように与えられる。

集中荷重  $P_0 \sin \omega t$  が作用する場合式(2.4.2.12)~(2.4.2.14)は

$$W_{mm'} = \Omega_{mm'} \Phi_{mm'}(x_i, y_i) \Phi_{mm'}(x_j, y_j) P_0 \sin \omega t \quad (2.4.2.25)$$

$$\theta_{xmm'} = \Omega_{mm'} \Phi'_m(x_i) \Phi_m(y_i) \Phi_{mm'}(x_j, y_j) P_0 \sin \omega t \quad (2.4.2.26)$$

$$\theta_{ymm'} = \Omega_{mm'} \Phi_m(x_i) \Phi'_m(y_i) \Phi_{mm'}(x_j, y_j) P_0 \sin \omega t \quad (2.4.2.27)$$

分布荷重  $p(x, y) \sin \omega t$  が作用する場合式(2.4.2.18)~(2.4.2.20)は

$$W_{mm'} = \Omega_{mm'} \Phi_{mm'}(x_i, y_i) \left[ \int \Phi_{mm'}(x, y) p(x, y) dx dy \right] \sin \omega t \quad (2.4.2.28)$$

$$\theta_{xmm'} = \Omega_{mm'} \Phi'_m(x_i) \Phi_m(y_i) \left[ \int \Phi_{mm'}(x, y) p(x, y) dx dy \right] \sin \omega t \quad (2.4.2.29)$$

$$\theta_{ymm'} = \Omega_{mm'} \Phi_m(x_i) \Phi'_m(y_i) \left[ \int \Phi_{mm'}(x, y) p(x, y) dx dy \right] \sin \omega t \quad (2.4.2.30)$$

モーメント荷重  $M_0 \sin \omega t$ , ( $M_0 = \alpha M_x + \beta M_y$ ) が作用する場合式(2.4.2.22)~(2.4.2.24)は

$$W_{mm'} = \Omega_{mm'} \bar{\Phi}_{mm'}(x_i, y_i) \left\{ \alpha \bar{\Phi}'_m(x_j) \bar{\Phi}_{m'}(y_j) M_x + \beta \bar{\Phi}_m(x_j) \bar{\Phi}'_{m'}(y_j) M_y \right\} \\ \times \sin \omega t \quad \text{-----} (2.4.2.31)$$

$$\theta_{xmm'} = \Omega_{mm'} \bar{\Phi}'_m(x_i) \bar{\Phi}_{m'}(y_i) \left\{ \alpha \bar{\Phi}'_m(x_j) \bar{\Phi}_{m'}(y_j) M_x \right. \\ \left. + \beta \bar{\Phi}_m(x_j) \bar{\Phi}'_{m'}(y_j) M_y \right\} \sin \omega t \quad (2.4.2.32)$$

$$\theta_{ymm'} = \Omega_{mm'} \bar{\Phi}_m(x_i) \bar{\Phi}'_{m'}(y_i) \left\{ \alpha \bar{\Phi}'_m(x_j) \bar{\Phi}_{m'}(y_j) M_x \right. \\ \left. + \beta \bar{\Phi}_m(x_j) \bar{\Phi}'_{m'}(y_j) M_y \right\} \sin \omega t \quad (2.4.2.33)$$

### 2.4.3 相対2辺単純支持他の2辺自由なる直交異方性板の運動方程式<sup>24)</sup>

いま，図 2.4.3.1 に示すように座標軸をとると，境界条件は式 (2.4.3.1)，(2.4.3.2) にて与えられる。

$x=0, x=l$  において

$$\left. \begin{aligned} W &= 0 \\ M_x &= -D_x \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \nu_y \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.4.3.1)$$

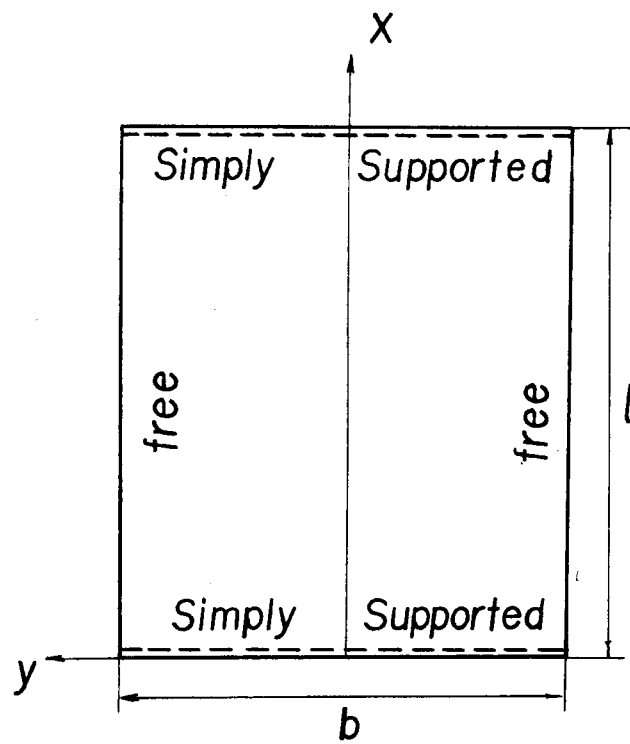
$y = \pm \frac{b}{2}$  において

$$\left. \begin{aligned} M_y &= -D_y \left( \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \nu_x \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right) = 0 \\ V &= -D_y \left\{ \frac{\partial^3 W}{\partial y^3} + \sqrt{\frac{D_x}{D_y}} \cdot \left( 2\kappa - \nu_y \sqrt{\frac{D_x}{D_y}} \right) \frac{\partial^3 W}{\partial y \partial x^2} \right\} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.4.3.2)$$

式 (2.4.2.3) にて与えられる直交異方性板の基礎微分方程式

$$\frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2\kappa \sqrt{\frac{D_y}{D_x}} \cdot \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{D_y}{D_x} \cdot \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} - \frac{\rho \omega_n^2}{D_x} W = 0 \quad (2.4.3.3)$$





Orthotropic Plate

Fig. 2.4.3.1

の解として式 (2.4.3.4) を考える。

$$\varphi_{mm'}(x, y) = \varphi_{m'}(y) \sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right) \quad (2.4.3.4)$$

ここに  $m, m'$  はそれぞれ  $x, y$  軸方向の振動次数

式 (2.4.3.4) は、すでに式 (2.4.3.1) の境界条件を満足しているから式 (2.4.3.4) を式 (2.4.3.3) に代入し、式 (2.4.3.2) にて示される境界条件を満足するようにして振動数方程式 および 振動モード を決定すると式 (2.4.3.5) ~ (2.4.3.10) が得られる。

#### (i) 振動数方程式

①  $x$  軸に対して対称振動の場合,  $\mu_m < 1$ ,  $\kappa = 1$

$$\begin{aligned} & \gamma'_m \left( \gamma_m^2 \sqrt{\frac{D_x}{D_y}} - \nu_x \right) \left\{ \gamma_m'^2 - (2 - \nu_y \sqrt{\frac{D_x}{D_y}}) \right\} \cosh\left(\frac{\gamma_m b}{2}\right) \sinh\left(\frac{\gamma'_m b}{2}\right) \\ & - \gamma_m \left( \gamma_m'^2 \sqrt{\frac{D_x}{D_y}} - \nu_x \right) \left\{ \gamma_m^2 - (2 - \nu_y \sqrt{\frac{D_x}{D_y}}) \right\} \sinh\left(\frac{\gamma_m b}{2}\right) \cosh\left(\frac{\gamma'_m b}{2}\right) = 0 \end{aligned}$$

----- (2.4.3.5)

②  $x$  軸に対して対称振動の場合,  $\mu_m > 1$ ,  $\kappa = 1$

$$\begin{aligned} & \gamma'_m \left( \gamma_m^2 \sqrt{\frac{D_x}{D_y}} - \nu_x \right) \left\{ \gamma_m'^2 + (2 - \nu_y \sqrt{\frac{D_x}{D_y}}) \right\} \cosh\left(\frac{\gamma_m b}{2}\right) \sin\left(\frac{\gamma'_m b}{2}\right) \\ & + \gamma_m \left( \gamma_m'^2 \sqrt{\frac{D_x}{D_y}} + \nu_x \right) \left\{ \gamma_m^2 - (2 - \nu_y \sqrt{\frac{D_x}{D_y}}) \right\} \sinh\left(\frac{\gamma_m b}{2}\right) \cos\left(\frac{\gamma'_m b}{2}\right) = 0 \end{aligned}$$

----- (2.4.3.6)

③  $x$  軸に対して逆対称振動の場合,  $\mu_m > 1$ ,  $\kappa = 1$

$$\begin{aligned}
& \gamma'_m \left( \gamma_m^2 \sqrt{\frac{D_x}{D_y}} - \nu_x \right) \left\{ \gamma_m'^2 + (2 - \nu_y \sqrt{\frac{D_x}{D_y}}) \right\} \sinh \left( \frac{\gamma_m b}{2} \right) \cos \left( \frac{\gamma'_m b}{2} \right) \\
& - \gamma_m \left( \gamma_m'^2 \sqrt{\frac{D_x}{D_y}} + \nu_x \right) \left\{ \gamma_m^2 - (2 - \nu_y \sqrt{\frac{D_x}{D_y}}) \right\} \cosh \left( \frac{\gamma_m b}{2} \right) \sin \left( \frac{\gamma'_m b}{2} \right) = 0
\end{aligned}$$

----- (2.4.3.7)

ここに

$$\gamma_m^2 = \mu_m + 1, \quad \gamma_m'^2 = \mu_m - 1, \quad \gamma_m = \alpha \gamma'_m, \quad \gamma'_m = \alpha \gamma_m$$

$$\alpha = \left( \frac{m\pi}{\ell} \right) \left( \frac{D_x}{D_y} \right)^{1/4}, \quad \mu = \left( \frac{\ell}{m\pi} \right)^2 \left\{ \frac{\rho \omega_n^2}{D_x} \right\}^{1/2}$$

### (ii) 振動モード

式(2.4.3.4)にて示される振動モード  $\varphi_{mm'}(x, y)$  の振巾を正規化条件式(式(2.2.1))より決定し, これを  $\Phi_{mm'}(x, y)$  とあらわせば次のように与えられる。

①  $x$  軸に対して対称振動(振動モード①),  $\mu = 1$ .

$$\Phi_{mm'}(x, y) = A_{mm'} (A'_{mm'} \cosh \gamma_{mm'} y + \cosh \gamma'_{mm'} y) \sin(m\pi x / \ell)$$

----- (2.4.3.8)

ここに

$$A'_{mm'} = \left\{ \frac{\gamma_{mm'}^2 - \nu_x (m\pi/\ell)^2}{\gamma_{mm'}^2 - \nu_x (m\pi/\ell)^2} \right\} \left\{ \frac{-\cosh(\gamma'_{mm'} b/2)}{\cosh(\gamma_{mm'} b/2)} \right\}$$

$$\begin{aligned}
A''_{mm'} = & \frac{1}{\gamma_{mm'} + \gamma'_{mm'}} \sinh \left\{ \frac{(\gamma_{mm'} + \gamma'_{mm'}) b}{2} \right\} \\
& + \frac{1}{\gamma_{mm'} - \gamma'_{mm'}} \sinh \left\{ \frac{(\gamma_{mm'} - \gamma'_{mm'}) b}{2} \right\}
\end{aligned}$$

$$A_{mm'}^2 = \frac{2}{Pl} \left\{ \frac{A_{mm'}'^2}{2} \left( \frac{1}{\gamma_{mm'}} \sinh \gamma_{mm'} b + b \right) \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\gamma_{mm'}'} \sinh \gamma_{mm'}' b + b \right) + 2 A_{mm'}' A_{mm'}'' \right\}$$

②  $x$  軸に対して対称振動 (振動モード②),  $\mu > 1$

$$\Phi_{mm'}(x, y) = B_{mm'} (B_{mm'}' \cosh \gamma_{mm'} y + \cos \gamma_{mm'}' y) \sin(m\pi x/l) \quad \text{-----} \quad (2.4.3.9)$$

ここに

$$B_{mm'}' = \left\{ \frac{\gamma_{mm'}'^2 + \nu_x (m\pi/l)^2}{\gamma_{mm'}^2 - \nu_x (m\pi/l)^2} \right\} \left\{ \frac{\cos(\gamma_{mm'}' b/2)}{\cosh(\gamma_{mm'} b/2)} \right\}$$

$$B_{mm'}'' = \gamma_{mm'} \sinh\left(\frac{\gamma_{mm'} b}{2}\right) \cos\left(\frac{\gamma_{mm'}' b}{2}\right) + \gamma_{mm'}' \cosh\left(\frac{\gamma_{mm'} b}{2}\right) \sin\left(\frac{\gamma_{mm'}' b}{2}\right)$$

$$B_{mm'}^2 = \frac{2}{Pl} \left\{ \frac{B_{mm'}'^2}{2 \gamma_{mm'}} (\sinh \gamma_{mm'} b + \gamma_{mm'} b) \right. \\ \left. + \frac{1}{2 \gamma_{mm'}'} (\sin \gamma_{mm'}' b + \gamma_{mm'}' b) + \frac{4 B_{mm'}' B_{mm'}''}{\gamma_{mm'}^2 + \gamma_{mm'}'^2} \right\}$$

③  $x$  軸に対して逆対称振動 (振動モード③),  $\mu > 1$

$$\Phi_{mm'}(x, y) = C_{mm'} (C_{mm'}' \sinh \gamma_{mm'} y + \sin \gamma_{mm'}' y) \sin(m\pi x/l) \quad \text{-----} \quad (2.4.3.10)$$

ここに

$$C_{mm'}' = \left\{ \frac{\gamma_{mm'}'^2 + \nu_x (m\pi/l)^2}{\gamma_{mm'}^2 - \nu_x (m\pi/l)^2} \right\} \left\{ \frac{\sin(\gamma_{mm'}' b/2)}{\sinh(\gamma_{mm'} b/2)} \right\}$$

$$C_{mm'}'' = \gamma_{mm'} \cosh\left(\frac{\gamma_{mm'} b}{2}\right) \sin\left(\frac{\gamma_{mm'}' b}{2}\right) - \gamma_{mm'}' \sinh\left(\frac{\gamma_{mm'} b}{2}\right) \cos\left(\frac{\gamma_{mm'}' b}{2}\right)$$

$$C_{mm'}^2 = \frac{2}{Pl} \left/ \left[ \frac{C_{mm'}'^2}{2} \left( \frac{1}{\gamma_{mm'}} \sinh \gamma_{mm'} b - b \right) + \frac{1}{2} \left( b - \frac{1}{\gamma_{mm'}} \sinh \gamma_{mm'} b \right) + \frac{4 C_{mm'}' C_{mm'}''}{\gamma_{mm'}^2 + \gamma_{mm'}'^2} \right] \right.$$

### (iii) 運動方程式

式(2.4.3.5)～(2.4.3.10)により固有振動数  $\omega_{mm'}$ , 振動モード  $\Phi_{mm'}(x, y)$  が求められるから種々の動荷重に対する運動方程式は 2.2 に述べた基礎式を使用して直ちに決定できるわけであるが, 振動モード  $\Phi_{mm'}(x, y)$  は 2.4.2 に述べた四辺単純支持した直交異方性矩形板の場合と同様  $x, y$  の関数  $\{\Phi_m(x), \Phi_{m'}(y)\}$  の積として与えられるので, この運動方程式も式(2.4.2.10)～(2.4.2.33)と全く同じ型で表現される。このようなわけで, ここでは重複をさけるため関数  $\Phi_m(x), \Phi_{m'}(y)$  および対応する式番号のみを示すことにする。

	$\Phi_{m'}(y)$	$\Phi_m(x)$
振動モード① 式(2.4.3.8)	$A_{mm'}(A'_{mm'} \cosh \gamma_{mm'} y + \cosh \gamma'_{mm'} y)$	} $\sin \frac{m\pi x}{l}$
振動モード② 式(2.4.3.9)	$B_{mm'}(B'_{mm'} \cosh \gamma_{mm'} y + \cos \gamma'_{mm'} y)$	
振動モード③ 式(2.4.3.10)	$C_{mm'}(C'_{mm'} \sinh \gamma_{mm'} y + \sin \gamma_{mm'} y)$	

表 - 2.4.3.1

	四辺単純支持した場合	相対2辺単純支持他の2辺自由の場合
$W = \sum_m \sum_{m'} W_{mm'}$	2.4.2.10	2.4.3.11
$\theta_x = \sum_m \sum_{m'} \theta_{xmm'}$ $\theta_y = \sum_m \sum_{m'} \theta_{ymm'}$	$\left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\}$ 2.4.2.11	2.4.3.12
集中荷重	2.4.2.12 § 2.4.2.14	2.4.3.13 § 2.4.3.15
移動荷重	2.4.2.15 § 2.4.2.17	2.4.3.16 § 2.4.3.18
分布荷重	2.4.2.18 § 2.4.2.20	2.4.3.19 § 2.4.3.21
モーメント荷重	2.4.2.21 § 2.4.2.24	2.4.3.22 § 2.4.3.25
周期荷重	2.4.2.25 § 2.4.2.33	2.4.3.26 § 2.4.3.34

表 2.4.3.2

## 2.4.4 数値計算

2.4.2; 2.4.3 において2種の直交異方性板の基礎式を導いたけれども数値計算は橋梁について行ってみることにする。式(2.4.3.16)を使用すれば、任意の速度で荷重が直交異方性板上を移動するとき、任意点のレスポンスを求めることができるので、実在橋に対して

どのような振動が発生するかを調べてみよう。

計算に使用した橋梁は長堀川新橋である。この橋は桁高を極端に低くする必要があったので中空板構造をとっている。

したがって、スパン方向と巾負方向の曲げ剛性  $D_x, D_y$  の比はほぼ1に近い値となっている。また、この橋は巾負  $b$  とスパン  $l$  との比  $b/l$  はほぼ0.72であるが、ここでは橋の諸定数はそのまま巾負の値のみが変化して板の形状が変わった場合を想定して、固有振動数、発生する振動モードの大きさなどについて調べることにする。

荷重は1 ton の大きさの一定力が一定速度で移動するものと考えた。この橋の諸元は、スパン  $l = 30.6 \text{ m}$ , 巾負  $b = 22 \text{ m}$ , 全重量  $W = 321.9 \text{ ton}$ ,  $D_x = 1.412 \times 10^{10} \text{ kg} \cdot \text{cm}$ ,  $D_y = 1.483 \times 10^{10} \text{ kg} \cdot \text{cm}$ ,  $V_x = V_y = 0.3$  である。

なお、直交異方性板の振動次数  $m, m'$  は解析的には無限に求められるが、ここでは最低次の振動モードの場合についてのみ計算を行なった。すなわち、 $m = 1, m' = 1, 2, 3$  の場合である。

これらの固有振動数と振動モードは式(2.4.3.5), (2.4.3.8); 式(2.4.3.6), (2.4.3.9); 式(2.4.3.7), (2.4.3.10)によりそれぞれ決定できるが今後の便利上①, ②, ③の番号をつけて区別す

ることとする。

### (i) 固有振動数について

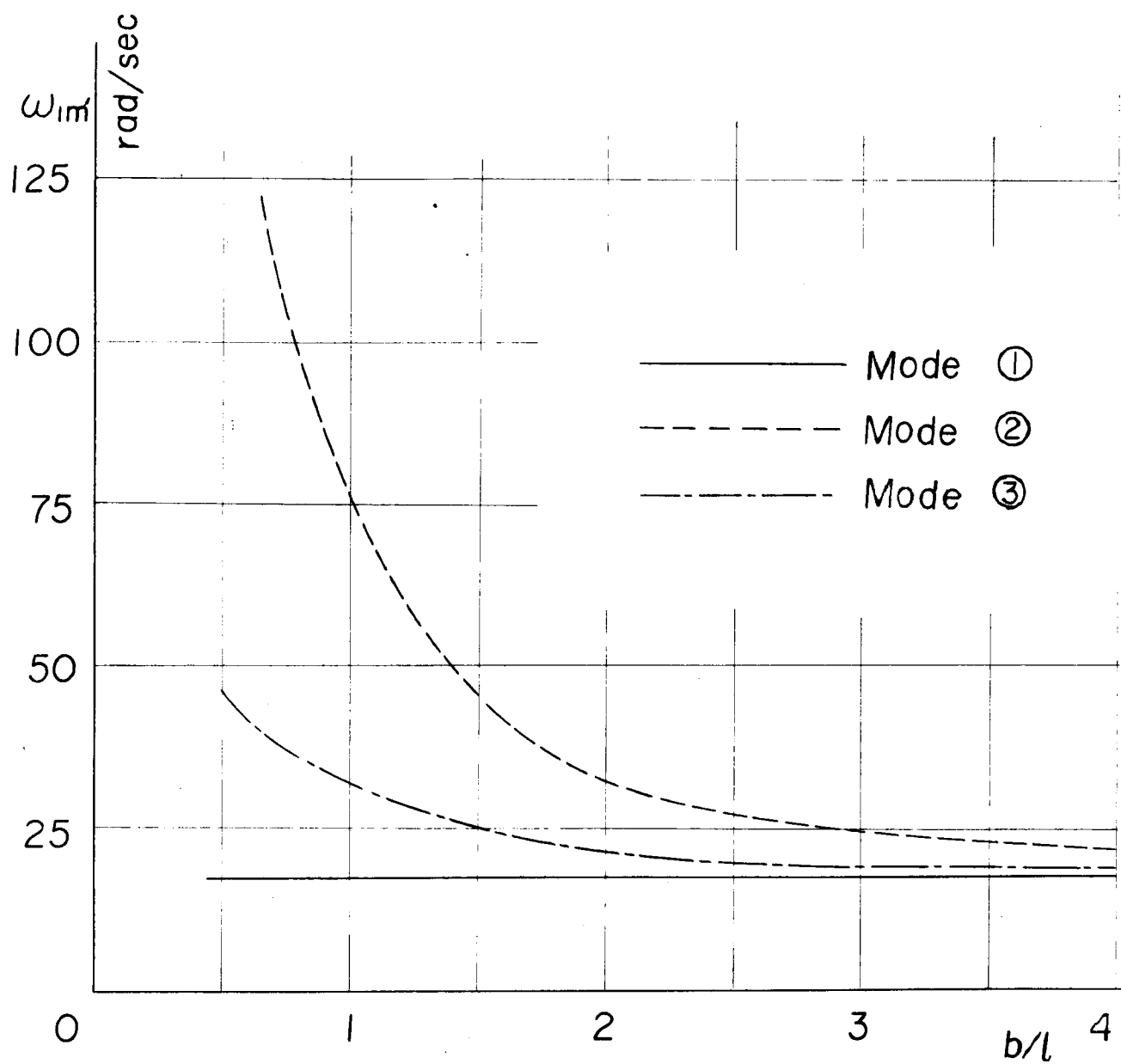
図-2.4.4.1 は直交異方性板の形状が変化した場合、各振動モードの固有振動数がどのように変化するかを示したものである。この図から全体の傾向として固有振動数は①の振動モードのものが一番小さく、②、③の振動モードのものは  $b/l$  の値が大きくなると急激に小さくなるけれども、①の振動モードの固有振動数以下に小さくならないことがわかる。①の振動モードは、 $b/l$  の値が変化しても  $\omega_{11}$  の値は 17.4 ~ 17.8 の範囲にあり、ほぼ一定の値となる。この板をはりと考えて固有振動数を求めてみると  $\omega = 17.93$  となるので、この①の振動モードに対する固有振動数は板をはりと考えて解析した固有振動数に対応するものであることがわかる。

### (ii) 振動モード( $\Phi_{lm}$ )について

式(2.4.3.8), (2.4.3.9), (2.4.3.10)により振動モード  $\Phi_{lm}$  を計算するときの式中の諸係数を表(2.4.4.1)に示す。

$x = l/2$  の断面における振動モードの形を図示すると、図-2.4.4.2 となる。ここでは板としての①、②、③の各振動モード  $\Phi_{lm}$  と、板をはりとして振動すると考えたときの  $\Phi_{beam}$  との比  $R$  によって、振動の



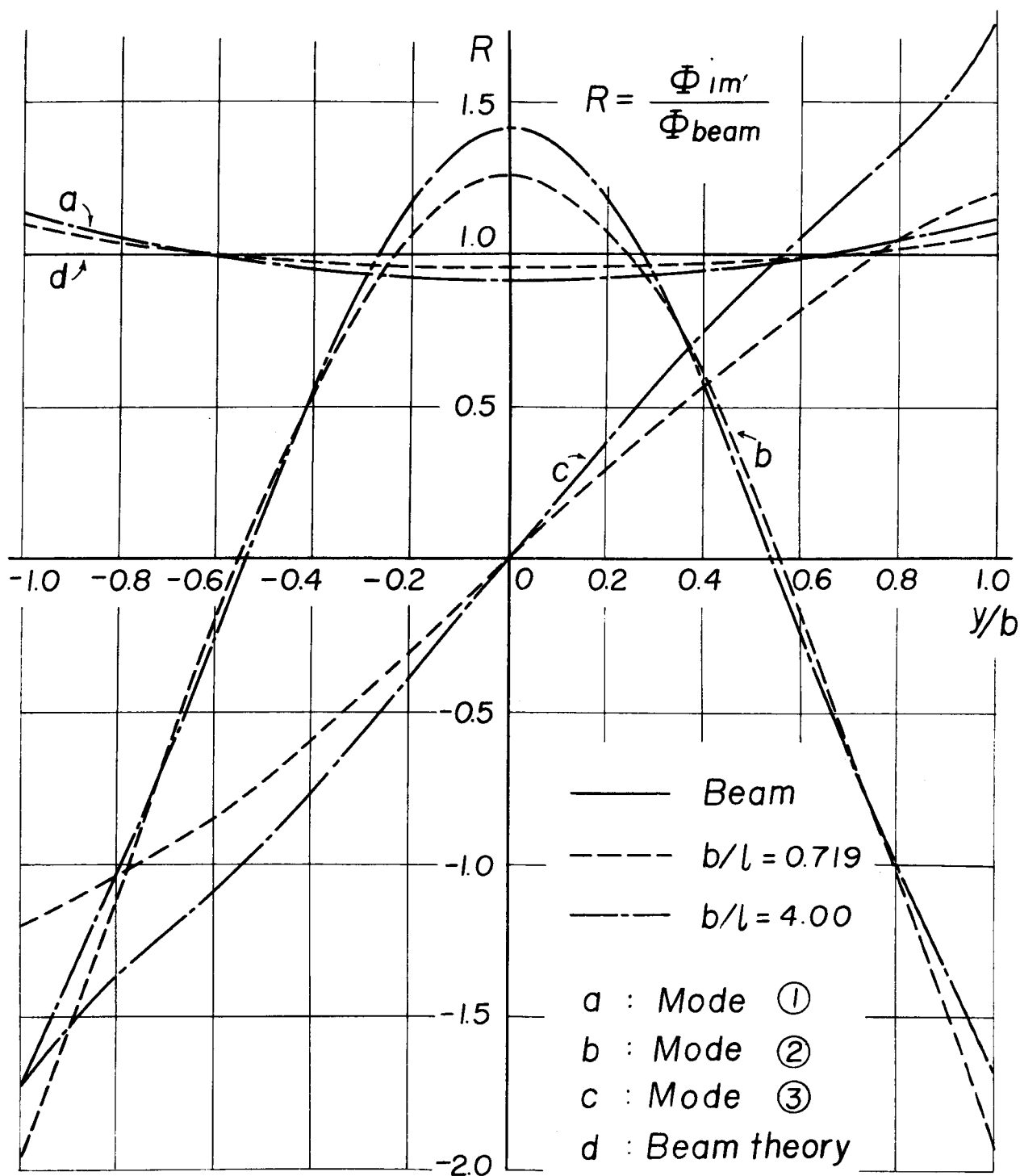


Relation between the Frequency of Free Vibration of Various Modes and the Shape of the Plate

Fig.2.4.4.1

$\Phi_{11}$	$b/l$	$A_{11} \quad A'_{11}$ ( $\times 10^{-3}$ )	$A_{11}$ ( $\times 10^{-2}$ )	$r_{11}$ ( $\times 10^{-3}$ )	$r'_{11}$ ( $\times 10^{-3}$ )
	0.719	4.799	7.054	1.423	1.763
	2	0.2062	4.387	1.430	0.1175
	3	0.01967	3.580	1.431	0.09898
	4	0.001971	3.090	1.432	0.08662
$\Phi_{12}$	$b/l$	$B_{12} \quad B'_{12}$ ( $\times 10^{-3}$ )	$B_{12}$ ( $\times 10^{-1}$ )	$r_{12}$ ( $\times 10^{-3}$ )	$r'_{12}$ ( $\times 10^{-3}$ )
	0.719	-6.943	1.052	2.692	2.278
	2	-0.2903	0.6287	1.700	0.9123
	3	-0.02554	0.5247	1.565	0.6273
	4	-0.002386	0.4616	1.511	0.4760
$\Phi_{13}$	$b/l$	$C_{13} \quad C'_{13}$ ( $\times 10^{-3}$ )	$C_{13}$ ( $\times 10^{-1}$ )	$r_{13}$ ( $\times 10^{-3}$ )	$r'_{13}$ ( $\times 10^{-3}$ )
	0.719	1.290	0.9752	1.781	1.056
	2	0.3381	0.6483	1.500	0.4403
	3	0.02859	0.5526	1.464	0.2923
	4	0.002708	0.4946	1.450	0.2141

Table-2.4.4.1



Shapes of Mode at the Cross Section  
 $X = l/2$

Fig.2.4.4.2

大きさを表わしている。この  $R$  の値は、 $b/l = 0.719$  のときのみが  $b/l = 2, 3, 4$  の場合とくらべて若干異なっているが、 $b/l = 2 \sim 4$  の範囲にあるときにはほとんど変化しないことが、すべての振動モード①、②、③についていえる。またこの図より  $b/l$  の大きさが変化しても、振動モードの形は①、②のモードにおいてはあまり変化しないが、③のモードでは少し異なった形状となることがわかる。

### (iii) 一定力が一定速度で移動する場合

一定荷重  $P_0$  が一定速度  $v_0$  で直交異方性板上を移動するときの運動方程式は式(2.4.3.16)により次式にて与えられる。

$$\ddot{w}_{mm'} + \omega_{mm'}^2 w_{mm'} = P_0 \Phi_{mm'}(x_i, y_i) \Phi_{mm'}\{x = v_0 t, y = y_j\} \quad (2.4.4.1)$$

ここでは、1 ton の大きさの一定荷重が 20 m/sec (72 km/h) の速度で、 $y_j = 0$ 、および  $y_j = b/2$  の位置をそれぞれ橋軸方向に移動する2つの場合について、板中点 ( $x_i = l/2, y_i = 0$ ) および自由辺中点 ( $x_i = l/2, y_i = b/2$ ) の2ヶ所の測定点におけるレスポンスを計算した。

直交異方性板が最初静止している場合、初期条件が  $t = 0$  のとき、 $w_{mm'} = 0$ 、 $\dot{w}_{mm'} = 0$  で与えられるから、式(2.4.4.1)の一般解は次式にて表わされる。

$$w_{mm'} = F_{mm'} \sin \omega_{mm'} t + G_{mm'} \sin (m \pi v_0 t / l) \quad (2.4.4.2)$$

上式の第1項は自由振動, 第2項は強制振動を表わしている。

走行位置・測定点の位置によって式(2.4.4.2)の  $F_{mm'}$ ,  $G_{mm'}$  の値は異なるので, この値を表(2.4.4.2)に示す。

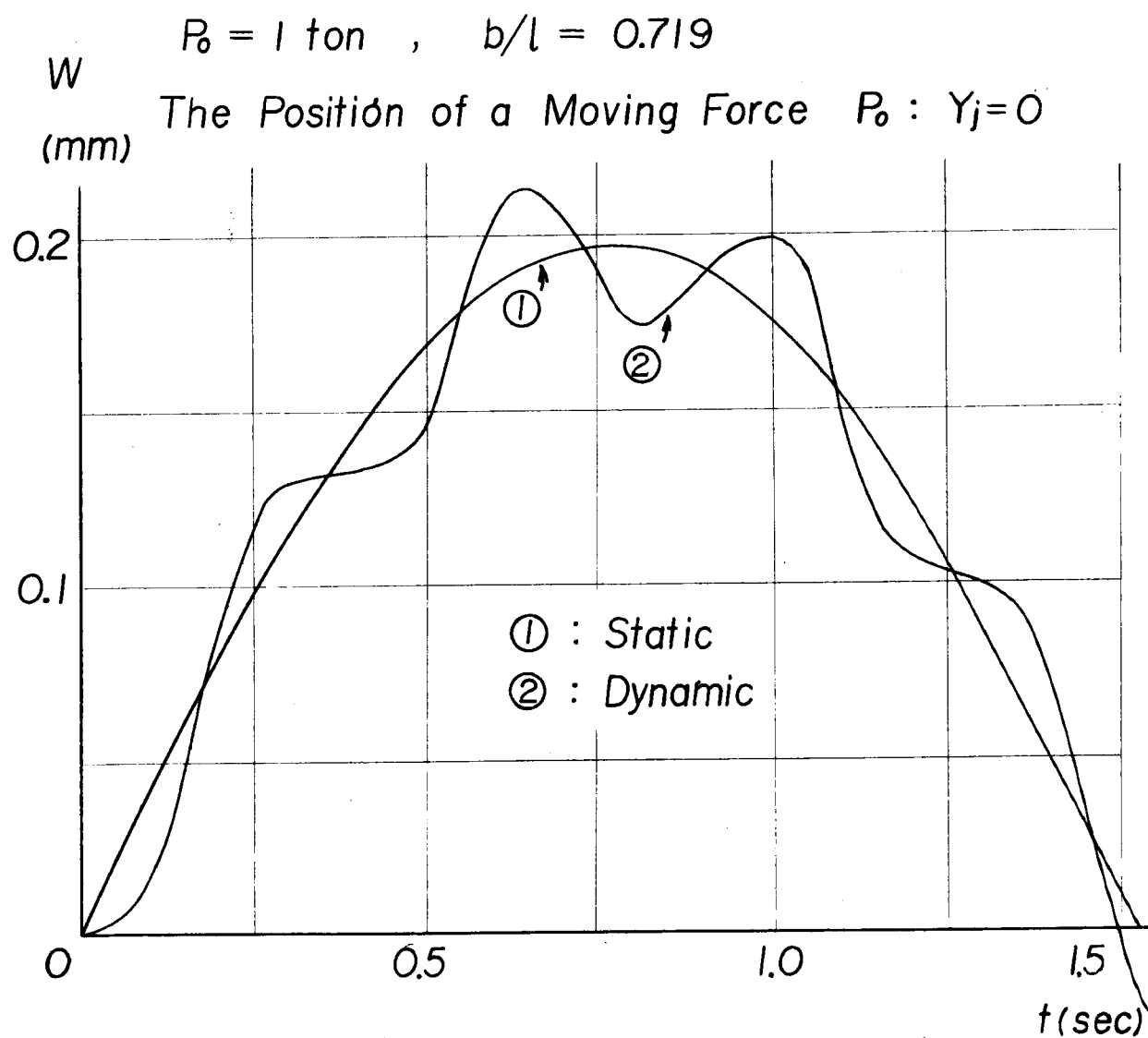
動的増加率は, 板の形状・走行位置・測定点などによりいろいろと変化するが, ここでは比較のために  $b/l = 0.719$ ,  $b/l = 4$  の2つの場合のみについて述べる。

図-2.4.4.3, 図-2.4.4.4は, 荷重が板中央 ( $y_i = 0$ ) の位置を移動したとき, 板中央点 ( $x_i = l/2, y_i = 0$ ) における動的たわみ曲線を示したものである。この図から,  $b/l = 0.719$  のときは動的増加率が約11%となっているが,  $b/l = 4$  の場合には動的増加率は2%程度と非常に小さくなっていることがわかる。これは,  $b/l = 0.719$  のときには②の振動モードはほとんど発生しないが,  $b/l = 4$  のときには②の振動モードは①の振動モードよりむしろ10%程度大きく発生し, しかも, この①と②の振動モードの振動数が異なっているために位相がずれて, 荷重が中央点附近にきたとき①と②の振動は逆位相となり, この両者を合成したものが零に近い値となるからである。

図-2.4.4.5, 図-2.4.4.6は荷重が  $y_i = b/2$  点を移動したとき, 点 ( $x_i = l/2, y_i = 0$ ) の動的たわみ曲線を示す。この場合

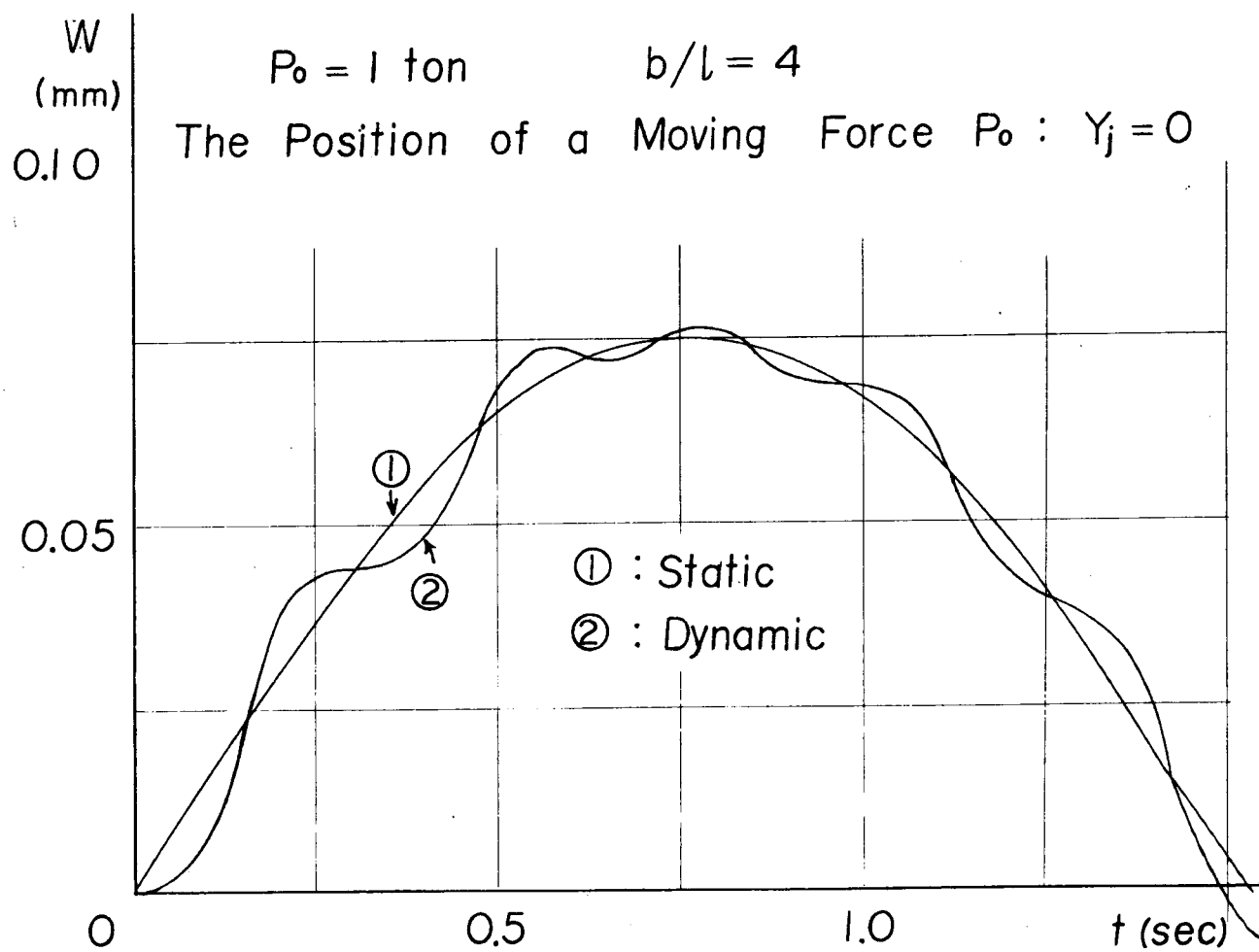
measuring point position of moving load			$x_0 = l/2, y_0 = 0$ $x = v_0 t, y = 0$		$x_0 = l/2, y_0 = 0$ $x = v_0 t, y = b/2$		$x_0 = l/2, y_0 = b/2$ $x = v_0 t, y = b/2$	
b/l	Mode	$\omega_{1m'}$	$F_{1m'}$	$G_{1m'}$	$F_{1m'}$	$G_{1m'}$	$F_{1m'}$	$G_{1m'}$
0.719	①	17.39	-2.247	19.03	-2.502	21.19	-2.784	23.58
	②	108.38	-0.01549	0.8219	0.02408	-1.271	-0.03723	1.965
	③	37.37	0	0	0	0	-0.3485	6.342
2	①	17.69	-0.7306	6.294	-0.9102	7.842	-1.134	9.769
	②	32.44	-0.2365	3.736	0.3228	-5.100	-0.4407	6.963
	③	21.31	0	0	0	0	-1.367	14.18
3	①	17.76	-4.4767	4.123	-0.6193	5.357	-0.8050	6.963
	②	24.79	-0.3732	4.506	-0.4806	-5.802	-0.6187	17.470
	③	19.42	0	0	0	0	-1.202	11.37
4	①	17.80	-0.3523	3.054	-0.4749	4.117	-0.6394	5.543
	②	21.88	-0.4213	4.491	0.5236	-5.580	-0.6506	6.933
	③	18.73	0	0	0	0	-1.045	9.530
0.719	beam theory	17.93	-2.198	19.19	-2.198	19.19	-2.198	19.19
2			-0.7897	6.896	-0.7897	6.896	-0.7897	6.896
3			-0.5267	4.599	-0.5267	4.599	-0.5267	4.599
4			-0.3949	3.448	-0.3949	3.448	-0.3949	3.448
		(rad/sec)	$(\times 10^{-3} \text{ cm})$					

Table - 2.4.4.2



Dynamic Deflection Diagram at a  
Point ( $X_i = l/2$  ,  $Y_i = 0$ )

Fig. 2.4.4.3



Dynamic Deflection Diagram at a Point  
 (  $X_i = l/2$  ,  $Y_i = 0$  )

Fig.2.4.4.4



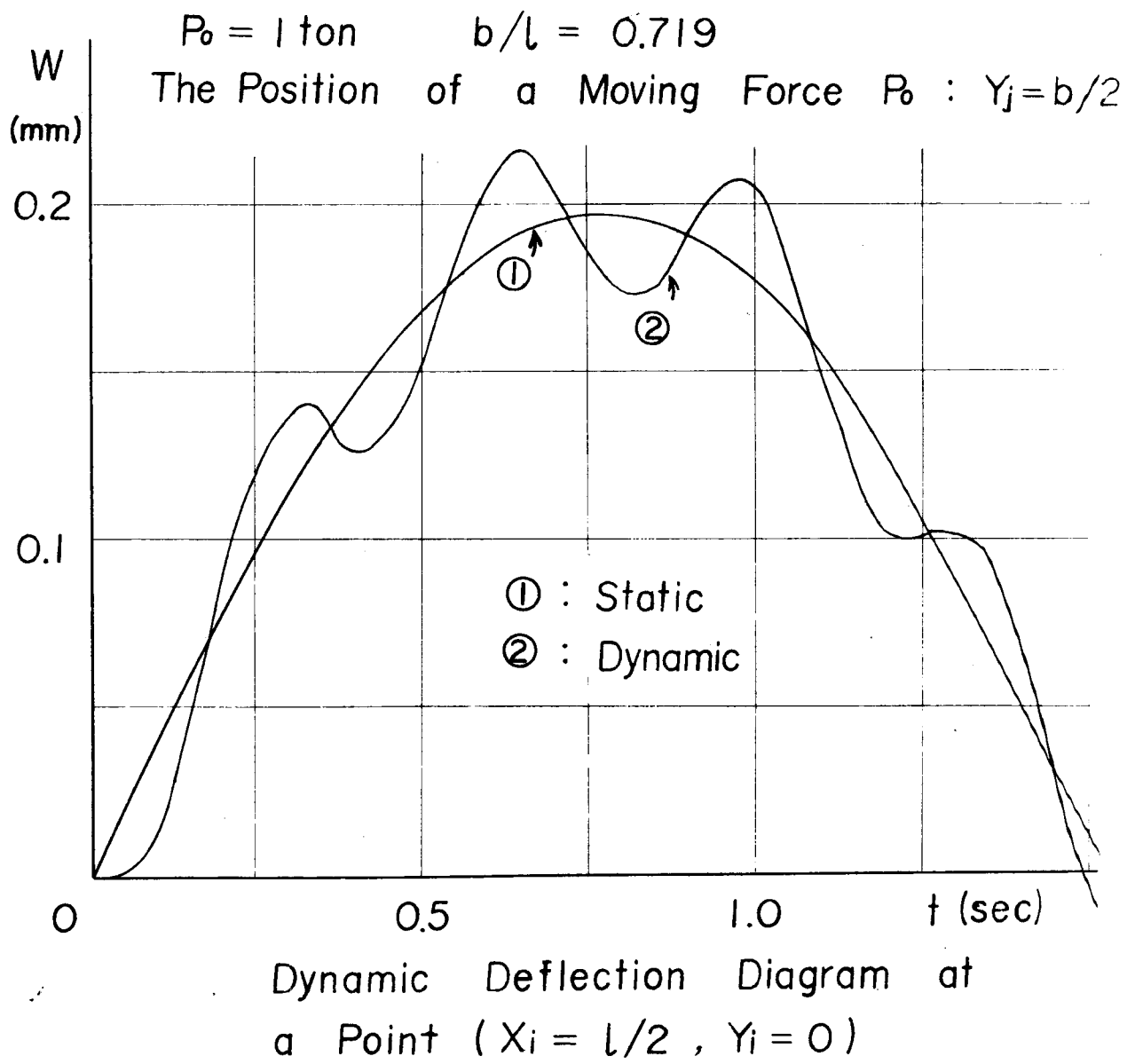
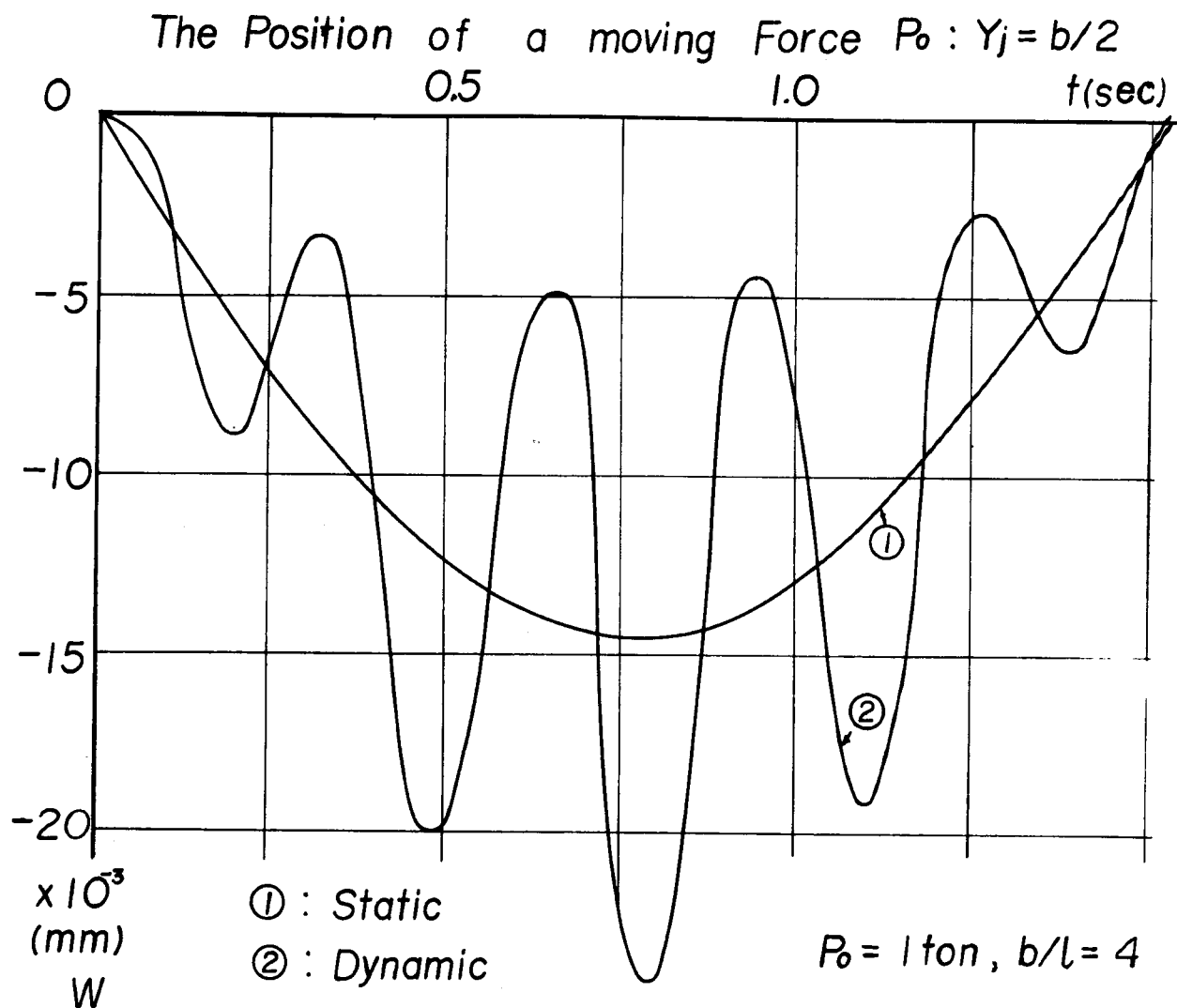


Fig. 2.4.4.5

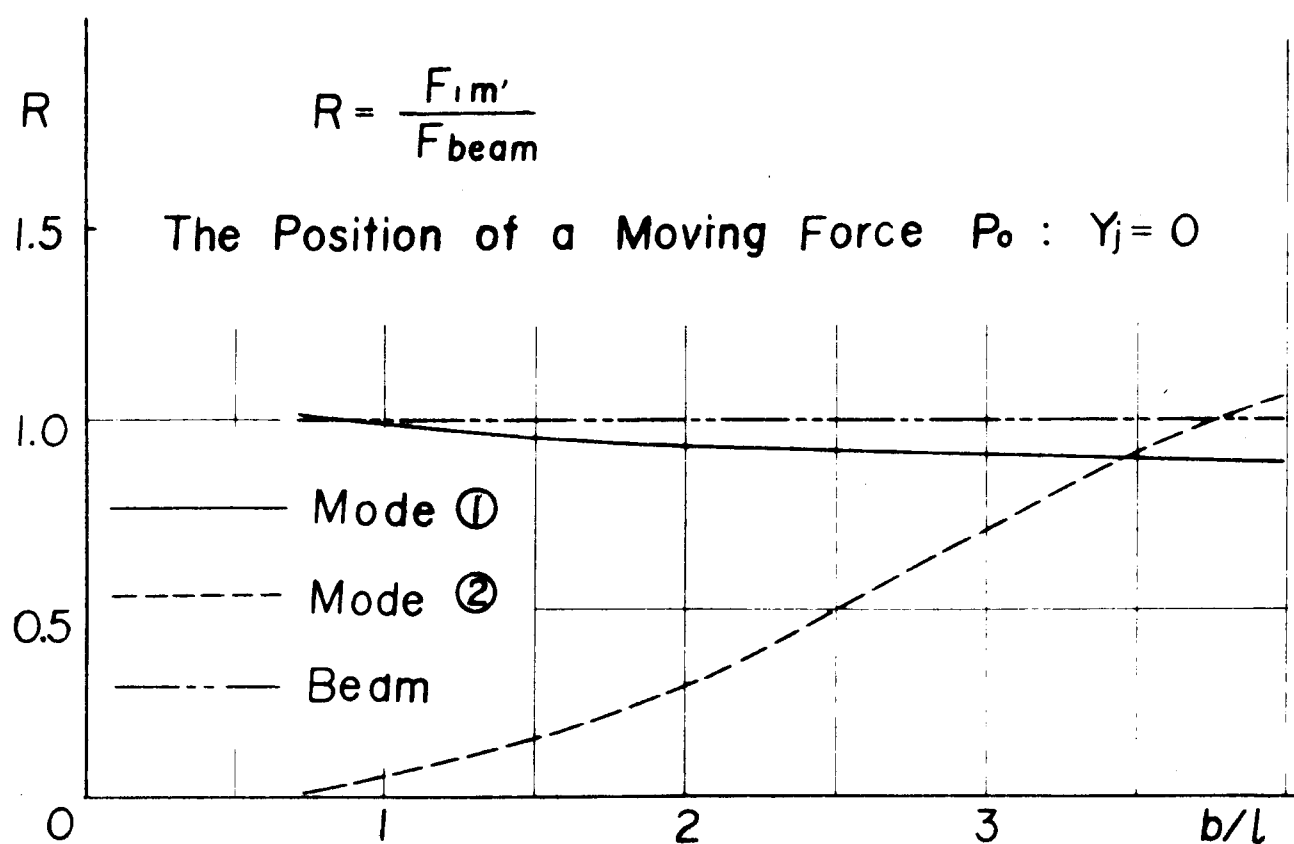


Dynamic Deflection Diagram at a Point  
 $(X_i = l/2, Y_i = 0)$

Fig. 2.4.4.6

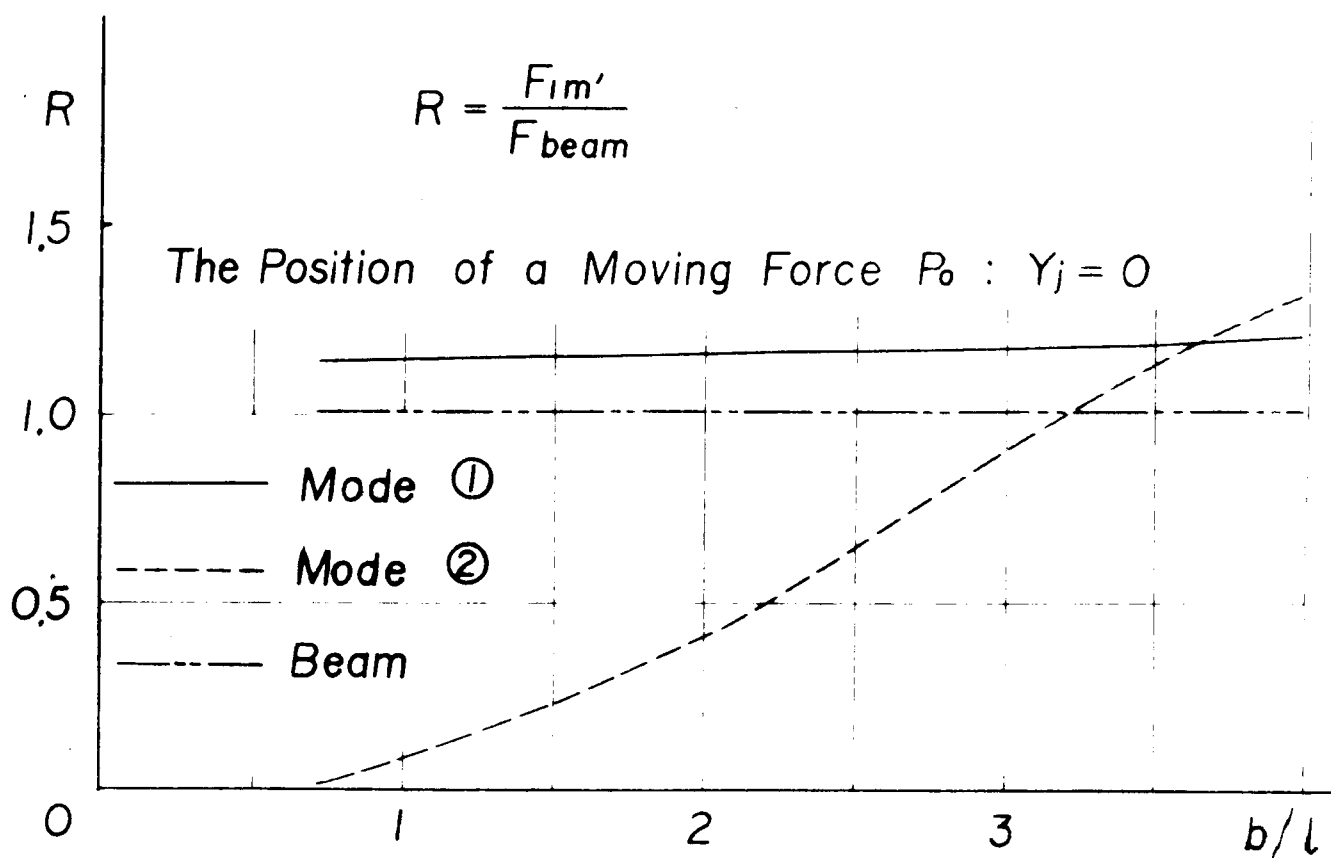
には、板の形によりレスポンスが全く異なることが知られる。すなわち、 $b/l = 0.719$  のときには、荷重の走行位置が  $y_i = b/2$  および  $y_i = 0$  の両者ではそのたわみ曲線はほとんど同じ値（図-2.4.4.3, 図-2.4.4.5）となるが、 $b/l = 4$  の場合には、荷重が  $y_i = b/2$  を移動した場合、板中央（ $x_i = l/2, y_i = 0$ ）におけるたわみは負になり、しかも動的増加率の値は67%と非常に大きくなっている（図-2.4.4.6）。走行位置が  $y_i = 0$  の場合（図-2.4.4.4）と非常に相違する。

つぎに移動荷重が橋梁上を通過したのち、直交異方性板が生じる各モードの自由振動の大きさ（式(2.4.4.2)の  $F_{mm'}$  値）が板の形状変化によってどのように変わるかについて述べる。ここでは、はりとしての振動と比較するために、はりとして解析したときの自由振動の大きさとの比  $R$  で表わし、走行荷重の位置が板中央（ $y_i = 0$ ）の場合に、測定点（ $x_i = l/2, y_i = 0$  または  $y_i = b/2$ ）の位置によってどのように変化するかを図-2.4.4.7, 図-2.4.4.8に示した。 $R$  の値は、自由辺中央（ $x_i = l/2, y_i = b/2$ ）の測定点においては①の振動モードは  $b/l$  の値が大きくなるとやや大きく発生する傾向にあるが、板中点（ $x_i = l/2, y_i = 0$ ）の測定点では逆に小さくなっている。②の振動モードは両者の場合とも  $b/l$  の値



The Magnitudes of the Natural Modes of  
Vibration at a Point ( $X_i = l/2$ ,  $Y_i = 0$ )  
Divided by Those Based on the Beam Theory

Fig. 2.4.4.7



The Magnitudes of the Natural Modes of Vibration at a Point ( $X_i = l/2$ ,  $Y_i = b/2$ ) Divided by Those Based on the Beam Theory

Fig. 2.4.4.8

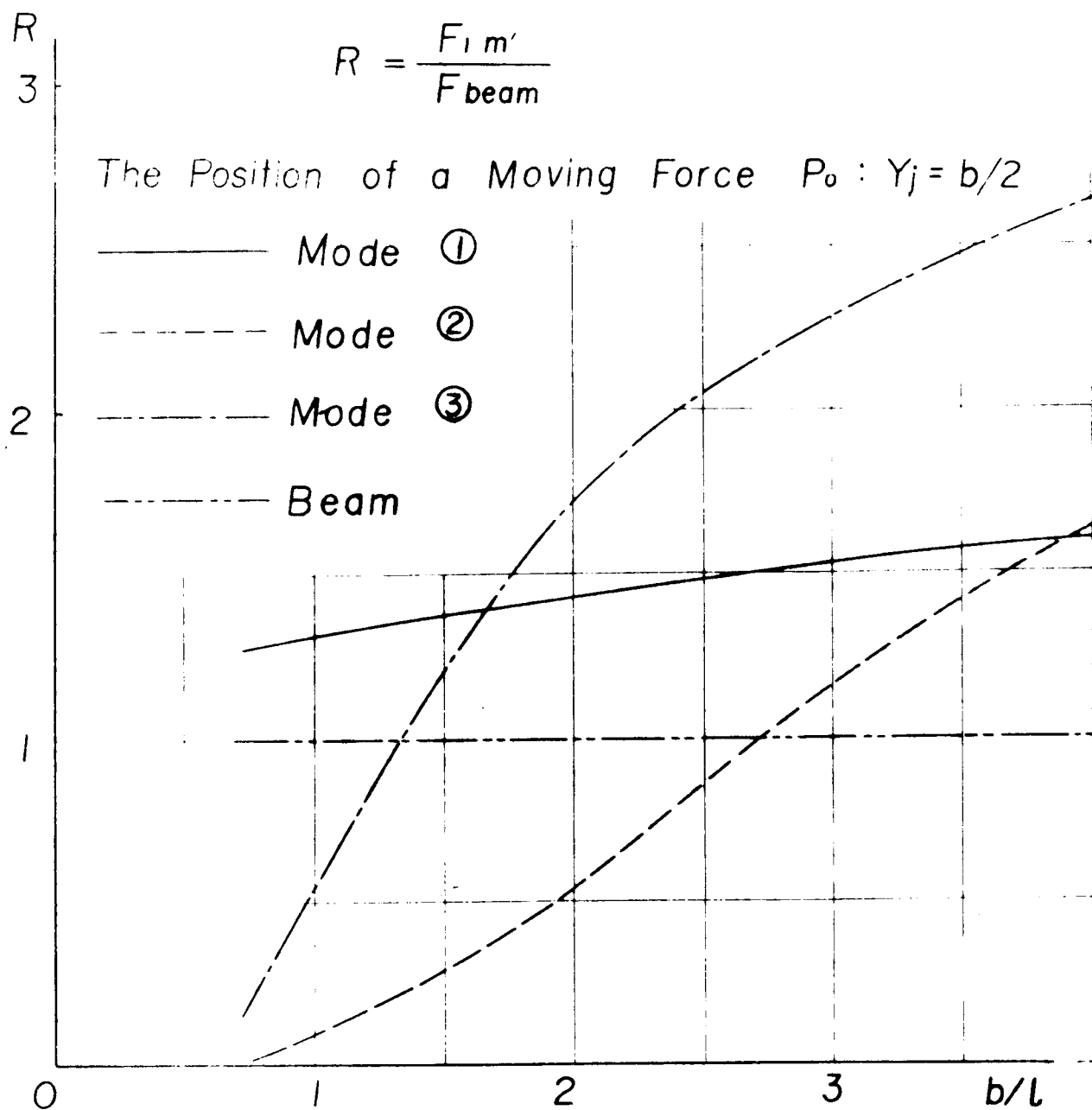
が増加すると同じように大きく発生するが、 $x_i = l/2, y_i = 0$  に測定点をおいた方が振動は小さくなる。また、②のモードは  $b/l < 1$  のときには①のモードの10%程度しか発生しないから、実際の問題として無視しても十分と考えられる。

図-2.4.4.9は荷重が  $y_i = b/2$  を走行したとき、自由辺中央点 ( $x_i = l/2, y_i = b/2$ ) における  $R$  の変化を示したものである。この図から③の振動モードは  $b/l < 0.72$  のときには、ほとんど発生しないが  $b/l$  の値が大きくなるにつれて急に大きく生じるようになり、 $b/l$  の値が1.7を超えると各振動モードのうち一番大きく生じることがわかる。

## 2.5 本篇の結語

第2篇では4章にわたり外力を受ける構造物のレスポンスを求めることについて述べた。

まず第1章において本篇の概説を述べた後、第2章において構造物が動的な外力を受ける時、そのレスポンスを求める基礎式を誘導し、その構造物の固有振動数と振動モードが決定できれば集中荷重・分布荷重・モーメント荷重・移動荷重などすべての動的な外力に対する運動方程式が直ちに立てられるこ



The Magnitudes of the Natural Modes of  
Vibration at a Point ( $X_i = l/2$ ,  $Y_i = b/2$ )  
Divided by Those Based on the Beam Theory

Fig. 2.4.4.9

とを明らかにした。

複雑な振動系からできている荷重が移動する場合またはモーメント荷重が作用するとき一般にはその基礎式の誘導は比較的困難なものであるけれども、前者に対しては図-2.2.3に示す等価モデルを考えることにより、これを単に連成振動の問題として直ちに運動方程式が誘導できるし、後者に対してはモーメント荷重を図-2.2.4(b)に示す等価な2つの集中力の和として置き換えれば、これもまた集中力が作用するときの基礎方程式をもととして運動方程式が容易に導かれる。すなわち、移動荷重またはモーメント荷重が作用する問題は、固定点に集中荷重が作用するときの基礎式を変形したもので解決でき、しかもこのようにして誘導した式は非常に簡単な形式であらわされるものである。なお、ここでは動的モーメント荷重を2つの動的集中荷重の和として置き換えることにより基礎式を誘導したが、このような解析手法は静的モーメント荷重が作用する場合に対しても当然使用できるものである。

移動荷重が作用する時その基礎式の誘導には通常Lagrangeの運動方程式が使用されるが、これは例えば図-2.2.3に示す振動系が移動するような場合、移動荷重と構造物との



系全体のエネルギーを求めこれに Lagrange の運動方程式を用いて基礎式を誘導する方法である。このような従来の解析法によると、移動荷重の振動系がさらに複雑なものになったりクーロン摩擦のような非線型要素を含むような場合、その基礎式の誘導は非常に困難となるものと考えられる。これを図-2.2.3 に示すような等価モデルを使用して連成振動の問題として基礎式を立てる方法によると、曲げ剛性の影響は全く考慮することなくたんに鉛直方向の力と変位のみを考えて基礎式が誘導できるので考え方が簡明になる。なお、この力学モデルは力の伝達・分配の状態を図式的にはっきりと理解させるに役立つものである。

式(2.2.14)～(2.2.31)よりわかるように、種々の動荷重に対する運動方程式が固有振動数と、振動モードまたはその一次微分とを使用して系統的に整然と表現できたことは、変形等置法を使用する解析過程(第3篇)においても式を簡潔に表現するのに非常に役立った。

第3章においては、種々の境界条件を有する梁の固有振動数・振動モードを求める基礎方程式について述べ、これらを(2.2)で求めた運動方程式中に使用して単純梁に動荷重が作用する時のレスポンスを求める運動方程式を誘導した。

また、これらの運動方程式の中、諸種の移動荷重が作用するときの基礎式に対して考察を行ない、これらが, Lowan, Timoshenko, 国井博士等が他の解析法により誘導した基礎式と一致することを確認めた。

最後に一定荷重  $P_0$  が単純梁上を一樣加速度で減速しながら移動するとき、任意点におけるレスポンスを求める基礎式を誘導し、数値計算を行なって、速度の変化がレスポンスにどのような影響を与えるかについて定量的に調べた。この結果速度変化の影響は 10~15% 程度撓みの増加となっており、その最大値は初速度と加速度との相対関係によって異なるものであることがわかった。すなわち、初速度  $20 \text{ m/sec}$ ,  $30 \text{ m/sec}$ , それに対応する加速度が  $-7.06 \text{ m/sec}^2$ ,  $-15.9 \text{ m/sec}^2$  程度の大きさのときに最大撓みが生じ、これより加速度の値が増加すると撓みはむしろ減少する結果となる。

第4章においては四辺単純支持された矩形板および相對2辺単純支持他の2辺自由なる矩形板を対象とし、直交異方性板の基礎微分方程式よりこれらの振動数方程式と振動モードを求める基礎式の誘導について述べた後、これらが種々の動荷重を受ける場合の運動方程式を決定した。四辺

単純支持された直交異方性板は固有振動数と振動モードが容易に求められるのに反し、相対2辺単純支持他の2辺自由なる矩形板ではそれらを決定する式がかなり複雑な関数となるが、最初にこの両者を求めておけば種々の動荷重に対するレスポンスは、撓み・撓み角とも各荷重ごとに系統的にあらわされる運動方程式より求めることができる。

最後に巾員の大きい橋を直交異方性板と見なし、この上を一定荷重が一定速度で走行するときの基礎式を求め、さらに数値計算を行なって巾員とスパンとの比、荷重の走行位置、測定点の位置が変化すると得られる動的レスポンスも大きく変ること示した。

## 第 3 篇

### 変形等置法の適用例

#### 3.1 概説

変形等置法は、1.2.1において述べたように、従来の方法と異なり、まず構造物全体を解析容易な単位構造物に分解し、そのちのちのちについて外力（力とモーメント）と変形（撓みと撓み角）との関係を求めた後、それらの各変形を等置して元の構造物に組み立てる時、その結合点に作用する外力は自由振動時には零であるという条件を使用して基礎式を誘導するものである。第2篇においては質量を考慮した梁および直交異方性矩形板について種々の荷重に対する動的レスポンスを求める基礎式を導いたから、第3篇ではこれらを使用して質量を有する動的構造物同志またはこれらと質量を無視できる静的構造物（梁・アーチ・弾性支承・中間支承・トラス等）とを組み合してできる種々の動的構造物に、変形等置法を適用して基礎方程式が容易に決定できることを示そう。なお、上述の組み合わせによりできる複合構造物はかなり多種類のものとなり、ここでそれら全部のものについて詳述

することは不可能であるので、ここでは単純梁をアーチで補強したランガー桁を代表例として取り上げ、これについて数値計算結果をも含めて検討し、他のものについては基礎式を誘導する程度に止めた。

構造物の振動としては横振動・捩れ振動が問題となるが、ここでは横振動のみを取り扱うことにする。なお、実在構造物では同一断面値を有するものはごくまれで、それは幾分変化するのが通常ではあるけれどもここでは同一断面構造として解析を進めた。

### 3.2 梁とアーチ(または索)よりなる構造物(ランガー桁・ローゼ桁・吊橋)

#### 3.2.1 緒言

3.2では梁とアーチ(または索)よりなる構造物にこの変形等置法も適用することについて述べる<sup>26)</sup>。この種の実在構造物としては、ランガー桁・ローゼ桁・吊橋等が考えられるが、これらは同一理論に歸着する構造のものであり、前2者ではアーチが圧縮力を受けているのに対し、後者は索が張力を受けている差異があ

るだけである。このようなわけで、ここではランガー桁を主として取り上げ、これについてたてた基礎方程式をもととして、ローゼ桁・吊橋の基礎式が容易に誘導できることを示すことにする。

ランガー桁の動的<sup>2), 29)</sup>研究として従来いくつかの研究<sup>2), 29)</sup>があげられるけれども、それらはいずれもランガー桁橋の固有振動数の解析理論が主であって、理論値と実測値との比較よりその理論の妥当性を論じたものが殆んどのである。ここでは変形等置法により固有振動数と振動モードを決定し、これを実験値と比較し、さらにこれをもととして動的レスポンスを求め、その特殊な場合として得られる静的レスポンスの撓みと曲げモーメントを、通常ランガー桁橋の設計計算に用いる仮想仕事法により得られた値と比較して、この理論の正しいことおよび固有振動数と振動モードの精度について述べる。

ここで扱うランガー桁橋の動的解析では、次の仮定を設けた。

- (1) アーチの軸線は放物線とする。
- (2) 補剛桁・アーチともに定断面として扱う。
- (3) 吊材の伸びは無視する。
- (4) アーチの重量は補剛桁に入れて無視する。

(5) 支承上において補剛桁図心線とアーチ軸線の間に偏  
心がない。

なお、この(5)の仮定すなわち偏心を考慮した場合については3.  
2.7に述べる。

### 3.2.2. 適合条件式

ランガー橋のアーチは折線の滑節アーチであるから、いまアーチ  
の一部材  $(j-1) \sim j$  が軸力をうけてその材長  $\Delta s_j$  が  $\Delta s_j$  だけ  
ちぢみ、 $j$  点が  $(j-1)$  点に対して、図-3.2.2.1(b)に示すよう  
に  $x, y$  方向に  $\Delta x_j, \Delta y_j$  だけ変位したとすると、次の関係式が  
成立する。

$$\Delta s_j = \Delta y_j \sin \alpha_j - \Delta x_j \cos \alpha_j \quad (3.2.2.1)$$

式(3.2.2.1)の関係は図-3.2.2.1(b)のような簡単な幾何学  
的關係から直ちに知ることができ、また Bleich のように三  
平方の定理を使って求めることもできる。上式を變形して次式を  
得る。

$$\Delta x_j = \Delta y_j \tan \alpha_j - \Delta s_j \sec \alpha_j \quad (3.2.2.2)$$

荷重のためにアーチが軸力をうけて變形し、たわんだ場合に、補  
剛桁より切り離したアーチの支間の水平伸び量は、上式の  $\Delta x_j$   
の総和として得られる。すなわち、

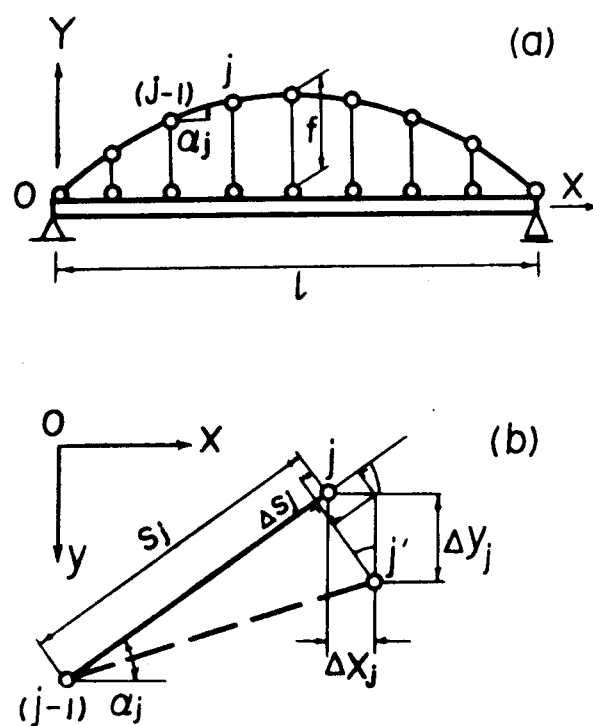


Fig. 3.2.2.1



$$\text{アーチ支間の水平伸び} = \sum_{j=1}^k \Delta x_j \quad (3.2.2.3)$$

ここに  $k$  は格間数。

一方補剛桁の軸力による伸びを  $\Delta l$  とすると、これは次式で示される。

$$\Delta l = \Delta H \cdot l / A_g E \quad (3.2.2.4)$$

ただし、

$\Delta H$  : 振動の極限位置におけるアーチの水平推力の増加量

$l$  : 支間

$A_g$  : 補剛桁断面積

式 (3.2.2.3) と式 (3.2.2.4) とは等しかるべきであるから、次の適合条件式が成立する。

$$\frac{\Delta H \cdot l}{A_g E} = \sum_{j=1}^k \Delta y_j \tan \alpha_j - \sum_{j=1}^k \Delta s_j \sec \alpha_j \quad (3.2.2.5)$$

さて、図 - 3.2.2.1 (a) のアーチ軸線が

$$Y = 4fx(l-x)/l^2$$

なる滑らかな曲線アーチとすると、

$$\tan \alpha_j = 4f(l-2x)/l^2.$$

今、ランガー桁の変形を次のように考える。

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi x}{l} \quad (3.2.2.6)$$

$d\varphi$  を求めると

$$d\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left( \frac{n\pi}{l} \right) \cos \frac{n\pi x}{l} \cdot dx$$

ゆえに、式 (3.2.2.6) の変形するとき式 (3.2.2.5) の右辺第1項は次の2つの形となる。

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^k \Delta y_j \tan \alpha_j &= \int_0^l \tan \alpha_j \cdot d\varphi \\ &= 16 \left( \frac{f}{l} \right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n\pi} \quad , \quad n=1, 3, 5, \dots \\ &= 0 \quad , \quad n=2, 4, 6, \dots \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\sum_{j=1}^k} \right\} (3.2.2.7)$$

式 (3.2.2.5) の右辺第2項は次の様になる。

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^k \Delta A_j \sec \alpha_j &= \sum_{j=1}^k \frac{\Delta H \cdot \sec^2 \alpha_j}{A_a E} A_j = \frac{\Delta H}{A_a E} \int_0^l \sec^3 \alpha_j dx \\ &\doteq \frac{\Delta H \cdot l}{A_a E} \left\{ 1 + 8 \left( \frac{f}{l} \right)^2 + 19.2 \left( \frac{f}{l} \right)^4 \right\} \end{aligned}$$

ここに  $A_a$  : アーチの断面積

従ってアーチ水平方向の伸び  $\Delta l_a$  は次式にて与えられる。

$$\Delta l_a = 16 \left( \frac{f}{l} \right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n\pi} - \frac{\Delta H \cdot l}{A_a E} \left\{ 1 + 8 \left( \frac{f}{l} \right)^2 + 19.2 \left( \frac{f}{l} \right)^4 \right\} \quad (3.2.2.8)$$

ゆえに式 (3.2.2.5) は、 $\Delta H$  と振動変位との関係を示すものとして次のようにあらわされる。

$$\left. \begin{aligned} n=1, 3, 5, \dots \text{ のとき, } \Delta H &= \frac{16fEB}{\pi l^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Q_n}{n} \\ n=2, 4, 6, \dots \text{ のとき, } \Delta H &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.2.2.9)$$

ここに

$$B = \frac{A_a A_g}{A_a + A_g \left\{ 1 + 8 \left( \frac{f}{l} \right)^2 + 19.2 \left( \frac{f}{l} \right)^4 \right\}}$$

このように、アーチは対称変形するときだけ効き、逆対称変形するときにはアーチは効かないから補剛桁だけの振動を考えれば良いことになる。また上の適合条件式式(3.2.2.9)は、滑節の折節アーチをなめらかな曲線アーチと仮定して求めたものであるが、アーチの断面積が各格間において変化する滑節アーチで、しかも補剛桁が変断面桁である場合についても、あるいはアーチの軸線が放物線以外の曲線であっても容易に上式に代る厳密解を求めることができる。なお上記のような簡易解の厳密解に対する精度については、数値計算の節で検討する。

### 3.2.3 振動数方程式と振動モード

はじめに対称振動について考える。変形等置法はまず構造物を適当な単位構造物に分解する必要があるが、ランガー桁の場合これを補剛桁とアーチとに分解する。そうして補剛桁に強制周期力を加えて定常振動させ、このときの補

剛桁の振動変位と同じ変位をアーチに与えた時、このアーチを安定に保持するに必要な釣合った外力を適合条件式を使用して前もって決定しておく。このようにして求めた外力を独立したアーチに加えながらアーチと補剛桁とを重ね合して結合するならば、補剛桁とアーチとは一体となってランガー桁橋としての振動をすることになる。このようにして組み立てられたランガー桁には、アーチと補剛桁とを結合する前にこの両者それぞれに加えた外力の和が作用している筈である。自由振動時には外力は零であるという条件を使用して振動数方程式と振動モードを求めてみよう。ただし、最初に補剛桁またはアーチ単独に作用させる周期力は任意に選べるものではなくて、ランガー桁内部の力の分布状態より決定する必要があるが、これは以下のようにして定めることができる。すなわち、ランガー桁がある変形を生じその結果アーチに軸力が発生した時、アーチが補剛桁に作用する力は等分布荷重であることを考えると、ここで独立したアーチ・補剛桁に作用させる外力としては等分布周期力を選ぶのが適当であることがわかる。

補剛桁のみに等分布周期力  $p_g \sin \omega t$  が作用するとき(図-3.2.3.1), 任意点の撓み  $w(x)$  は式 (2.3.9), (2.3.16)

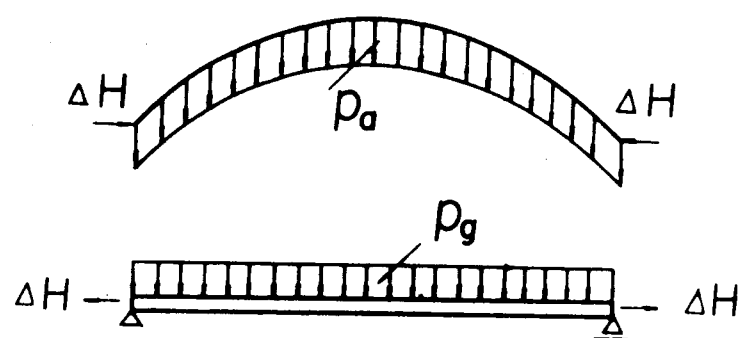


Fig. 3.2.3.1

$$W = \sum_{m=1}^{\infty} W_m \quad (3.2.3.1)$$

$$W_m = \frac{4}{\omega_{gm}^2 - \omega^2} \cdot \frac{1}{m\pi\rho} \sin \frac{m\pi x}{l} \cdot P_0 \sin \omega t \quad (3.2.3.2)$$

により次式により示される。

$$W(x) = \sum_{n=1}^{\infty} W_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4P_0}{\pi\pi\rho(\omega_{gn}^2 - \omega^2)} \cdot \sin \frac{n\pi x}{l} \cdot \sin \omega t \quad (3.2.3.3)$$

ただし、 $\omega_{gn}$  は補剛桁のみの  $n$  次の固有振動数であり、これは次式により与えられる (表 2.3.1 参照)。

$$\omega_{gn} = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho}} \quad (3.2.3.3')$$

いまアーチを式 (3.2.3.3) によりあらわされる補剛桁と同じ変形をさせた場合、アーチに生じる軸力  $\Delta H$  は適合条件式 (3.2.2.9) を使用して直ちに求められる。すなわち、

$$\Delta H = \frac{64fEBP_0}{\pi^2\rho l^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi^2(\omega_{gn}^2 - \omega^2)} \cdot \sin \omega t \quad (3.2.3.4)$$

図 - 3.2.3.1 に示すようにアーチを単独に切り出し、上式で与えられる  $\Delta H$  の力を両端に作用させた時、このアーチを安定に保持させることについて考える。アーチが両端に  $\Delta H$  なる水平推力を受けている時、このアーチには最大値  $\Delta H \cdot f$  なる放物線状の曲げモーメントが作用しているからこのままではアーチを安定に保つことはできない。いま、このアーチに

$$p_a = \frac{8\Delta H \cdot f}{l^2} = \frac{5/2 E f^2 B p_g}{\pi^2 p l^4} \sum \frac{1}{\pi^2 (\omega_{gn}^2 - \omega^2)} \quad (3.2.3.5)$$

なる等分布荷重  $p_a \sin \omega t$  を作用させれば、上記の曲げモーメントは零となりこのアーチは単独で安定する。このようにして保持させられたアーチは両端に  $\Delta H$  なる水平推力と式 (3.2.3.5) により与えられる等分布荷重  $p_a$  とを同時に受け、しかも式 (3.2.3.3) により与えられる補剛桁と同じ変形をしている。いま補剛桁に等分布荷重  $p_g \sin \omega t$  と両端には  $\Delta H$  なる引張力とを作用させながら上記のアーチとを重ね合して結合すればランガー桁が組み立てられる。ただしこのようにして組み立てられたランガー桁は (図-3.2.3.1)

$$p_0 = p_a + p_g \quad (3.2.3.6)$$

なる等分布周期荷重が外力として作用し、その変形は式 (3.2.3.3) にて示される。

自由振動時には外力は零であるという条件

$$p_a + p_g = p_0 = 0$$

を式 (3.2.3.5) に使用すると振動数方程式が得られる。すなわち

$$1 + \frac{5/2 E f^2 B}{\pi^2 p l^4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi^2 (\omega_{gn}^2 - \omega^2)} = 0 \quad (3.2.3.7)$$

上式に  $n=1, 3, 5, \dots$  を入れ, さらに  $n$  の各次数について式(3.2.3.3')に与えられる  $\omega_{gn}$  の値を使用すれば, 上式の中で未知数は  $\omega$  だけとなるから試算により容易にランガー桁橋の対稱振動の固有振動数  $\omega_m$ , すなわち  $\omega_1, \omega_3, \omega_5, \dots$  が求められる。なおこのようにして固有振動数を求めると理論的には振動次数に制限なく高次のものまで決定できる。式(3.2.3.7)により与えられる振動数方程式は, 形式的には無限項数の計算を必要とするようになっているが,  $\omega_{gn}^2$  は  $n^4$  に比例して増大するものであるから(式(3.2.3.3')参照), この級数は急速に収束し実用的には3~5項程度とて計算しても充分な精度が得られるようである。

振動モードは式(3.2.3.7)より求めたランガー桁の固有振動数  $\omega_m$ , ( $m=1, 3, 5, \dots$ ) の値を式(3.2.3.3)に代入すれば直ちに決定できる。振動モードは振中の大きさは自由であるので, 常数の係数を省略すると振動モードは次式によりあらわされる。

$$\varphi_m(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(\omega_{gn}^2 - \omega_m^2)} \cdot \sin \frac{n\pi x}{l} \quad (3.2.3.8)$$

この振動モードも無限項の級数和により与えられているが, 実用計算には振動数方程式の場合と同様3~5項程度の項数をとって計算すれば充分の計算精度が得られる。



この正規化した振動モードは正規化条件式(式(2.2.1))

$$\int \rho \bar{\Phi}_m^2(x) dx = 1 \quad (3.2.3.9)$$

を使用して次式により与えられる。

$$\bar{\Phi}_m(x) = C_m \cdot \sum_{n=1,3,5,\dots} b_{mn} \sin \frac{n\pi x}{l} \quad (3.2.3.10)$$

ここに

$$C_m^2 = \frac{2}{\rho l} \cdot \frac{1}{\sum_{n=1,3,5,\dots} b_{mn}^2}$$

$$b_{mn} = 1/n (\omega_{gn}^2 - \omega_m^2)$$

式(3.2.2.9)からわかるように、逆対稱振動時にはフーチは全く効かないから補剛桁のみの振動を考えればよい。したがって逆対稱振動は定断面単純梁の逆対稱振動に歸着する。この固有振動数 $\omega_m$ および正規化モード $\bar{\Phi}_m(x)$ は次式により与えられる(表-2.3.1, 表-2.3.2参照)。

$$\omega_m = \left( \frac{m\pi}{l} \right)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho}} \quad (3.2.3.11)$$

$$\bar{\Phi}_m(x) = \sqrt{\frac{2}{\rho l}} \sin \frac{m\pi x}{l} \quad (3.2.3.12)$$

ただし,  $m = 2, 4, 6, \dots$

### 3.2.4 運動方程式

3.2.3においてランガー析の固有振動数 $\omega_m$ および正規化モード $\Phi_m(x)$ がすべて決定したから、2.2に述べた基礎式を使用すると種々の動的外力に対する運動方程式は直ちに決定できる。

いま式(2.2.5)を使用してその動的レスポンスを

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} w_m \quad (3.2.4.1)$$

により示すと、各荷重に対する $w_m$ の運動方程式は次のようになる。

(i) 集中荷重 $P(t)$ が作用する場合 (図-3.2.4.1)

$$\ddot{w}_m + \omega_m^2 w_m = \Phi_m(x_i) \Phi_m(x_j) P(t) \quad (3.2.4.2)$$

$x_i$ : 測定点の座標

$x_j$ : 荷重点の座標

(ii) 集中荷重 $P(t)$ が移動する場合

$$\ddot{w}_m + \omega_m^2 w_m = \Phi_m(x_i) \Phi_m\{x_j(t)\} P(t) \quad (3.2.4.3)$$

特に一定荷重 $P_0$ が一定速度 $V_0$ で移動する時には

$$\ddot{w}_m + \omega_m^2 w_m = \Phi_m(x_i) \Phi_m\{x_j(t) = V_0 t\} P_0 \quad (3.2.4.4)$$

(iii) 周期力 $P = P_0 \sin \omega t$ が作用する場合

$$\ddot{w}_m + \omega_m^2 w_m = \Phi_m(x_i) \Phi_m(x_j) P_0 \sin \omega t \quad (3.2.4.5)$$

または上式を解いて

$$w_m = \Omega_m \Phi_m(x_i) \Phi_m(x_j) P_0 \sin \omega t \quad (3.2.4.6)$$

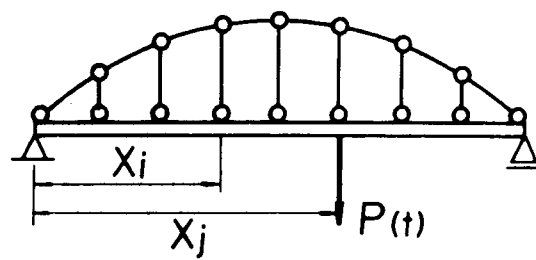


Fig. 3.2.4.1

$$\Omega_m = 1/(\omega_m^2 - \omega^2)$$

また,このような動的外力が作用する時,補剛桁における曲げモーメントのレスポンスは,上式より求めた撓み曲線を2階微分して直ちに得られる。すなわち

$$M(x) = -EI \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = -EI \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \sum_{m=1}^{\infty} W_m \right) \quad (3.2.4.7)$$

### 3.2.5 静荷重 $P_0$ が作用する場合の静的たわみと曲げモーメントとの解

静荷重  $P_0$  が作用するときのランガー桁橋のたわみや曲げモーメントは,通常の方法すなわち仮想仕事法などによって解析できるわけであるが,後の数値計算においてこの変形等置法の理論が正しいかどうかを検討するために,動的レスポンスの特別な場合として静荷重をうけるランガー桁のたわみと曲げモーメントとの影響線の解をこの動的解析から求めておこう。静荷重  $P_0$  が  $x = x_i$  点に作用するときには,式(3.2.4.6)において  $\omega \rightarrow 0$  の極限を考えればよい。このとき  $x_i$  点のたわみは次式にて与えられる。

$$W(x_i) = \sum_{m=1}^{\infty} \Phi_m(x_i) \Phi_m(x_j) P_0 / \omega_m^2 \quad (3.2.5.1)$$

よって  $x_i$  点のたわみ影響線は上式の荷重点  $x_j$  を変数とみれば

はランガー桁橋の  $\omega_m$  と  $\varphi_m(x)$  を使用して計算できることになる。 $\omega_m$  は振動数方程式 (式 (3.2.3.7)) と式 (3.2.3.11) から求まり、 $\varphi_m(x)$  は式 (3.2.3.10), (3.2.3.12) により与えられるから、これらを式 (3.2.5.1) に入れると、式 (3.2.5.2), (3.2.5.3) が得られる。

$m = 1, 3, 5, 7, \dots$  のとき

$$\omega_m = \frac{C_m^2 P_0}{\omega_m^2} \left( \sum_{n=1,3,5,\dots} b_{mn} \sin \frac{n\pi x_i}{l} \right) \left( \sum_{n=1,3,5,\dots} b_{mn} \sin \frac{n\pi x_j}{l} \right) \quad \text{----- (3.2.5.2)}$$

$m = 2, 4, 6, \dots$  のときの  $\omega_m$  を  $\omega_{gm}$  と書くと

$$\omega_{gm} = \frac{2 P_0}{P l \omega_{gm}^2} \left( \sin \frac{m\pi x_i}{l} \right) \left( \sin \frac{m\pi x_j}{l} \right) \quad (3.2.5.3)$$

式 (3.2.5.3) の  $\omega_{gm}$  は補剛桁のみの固有振動数であり、式 (3.2.3.11) にて与えられる。よってランガー桁橋のたわみは式 (3.2.5.2) と式 (3.2.5.3) とを重ね合せて次式より求まる。

$$\omega = \sum_{m=1}^{\infty} \omega_m \quad (3.2.5.4)$$

さて、高次のモードに対するたわみは微少であるけれども、式 (3.2.5.2) のたわみを全モードについて計算し、たわみの厳密解を得ることは非常に煩雑であるので、ここで計算の簡略化を考える。適合条件式 (3.2.2.9) からわかるように、高次の振動数

形に対してアーチは次第に作用しなくなるから、ランガー桁の高次振動においてはその固有振動数  $\omega_m$  は補剛桁のみの固有振動数  $\omega_{gm}$  と等しくなることが想像される。スパンの異なる2つのランガー橋について5次の振動数を計算してみると表(3.2.5.1)に示すような結果が得られた。

橋 名	$\omega_5$	$\omega_{g5}$	誤 差
子 飼 橋 ( $l = 57.2m$ )	78.607	78.520	0.11 %
宇 崎 橋 ( $l = 139.2m$ )	25.904	25.035	0.27 %

(rad/sec)

註  $\omega_5$ : ランガー桁橋の5次の振動数

$\omega_{g5}$ : 補剛桁のみの5次の振動数

表 3.2.5.1

この表より7次より高次のランガー桁の固有振動数は補剛桁のみとそれと一致するとみなしてよいことがわかる。よって式(3.2.5.4)は次式に示すような項に分けて計算すれば、その数値計算がより容易でかつ厳密な解が得られる。

$$W = W_{g\infty} - (W_{g1} + W_{g3} + W_{g5}) + (W_1 + W_3 + W_5) \quad (3.2.5.5)$$

ここに  $W_{g\infty}$  は補剛桁のみに静荷重が載荷したときの撓みであるが、この計算は式(3.2.5.3)を使うのではなく、単純梁を静力学的に解けば容易にその厳密解が得られるので、周知のたわみの解式あ

るいは影響線を用いればよい。第2項の各項は補剛桁のみの1,3,5次のモードによる撓みであって式(3.2.5.3)にて求められるものであり、また第3項の各項はランガー桁橋の1,3,5次のモードに対する撓みであって、式(3.2.5.2)より計算されるものである。逆対称モードに対する $W$ と7次より高次の対称モードに対する撓みはすべて $W_{g\infty}$ の中に含まれているわけである。

次に曲げモーメントあるいはその影響線の解を求めておこう。すでに示した式(3.2.4.7)の計算を行えばよいわけであるが、 $x_i$ 点に静荷重 $P_0$ が働いているとき任意点 $x_j$ 点の曲げモーメントは式(3.2.5.5)を $x_i$ で2回微分して求められる。すなわち次式となる。

$$M = M_{g\infty} - (M_{g1} + M_{g3} + M_{g5}) + (M_{11} + M_{31} + M_{51}) \quad (3.2.5.6)$$

ここに $M_{g\infty}$ は補剛桁のみのときの曲げモーメント、第2項は補剛桁の1,3,5次のモードに対する曲げモーメント、第3項はランガー桁橋の1,3,5次のモードに対する曲げモーメントであって、次のようにして計算する。

$M_{g\infty}$ は単純梁を静力学的に求めれば直ちに計算できる。第2項の各項は式(3.2.5.3)を2回微分して得られる。すなわち

$$M_{g\infty} = EI \cdot P_0 \cdot \frac{2}{\rho l} \left( \frac{\pi}{l} \right)^2 \frac{m^2}{\omega_{gm}^2} \sin \frac{m\pi x_i}{l} \sin \frac{m\pi x_j}{l} \quad (3.2.5.7)$$

第3項の各項は式(3.2.5.2)を2回微分して得られる。すなわち、

$$M_m = EI \cdot P_0 \cdot \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \cdot \frac{C_m^2}{\omega_m^2} \left( \sum_{n=1,3,5} n^2 b_{mn} \sin \frac{n\pi x_i}{l} \right) \left( \sum_{n=1,3,5} b_{mn} \sin \frac{n\pi x_j}{l} \right) \quad \text{-----} \quad (3.2.5.8)$$

ランガー桁橋の撓みと曲げモーメントの影響線を求めるにあたって、ここでは上記のように高次の振動モード成分と逆対称モード成分をすべて補剛桁成分として含ませる方法をとったが、この解析方法の便利さは曲げモーメントの影響線を求める時に特に顕著にあらわれる。これは曲げモーメントを求める時に撓み曲線を2回微分しているのですべてその収束性が悪くなるためである。このようなわけで上記の解析手法によらなければ精度のよい数値解は容易に得られない。

### 3.2.6 移動荷重をうける場合の撓みの解.

静的レスポンスの解が求まったので、ここではランガー桁橋上を  $P_0 = 1$  なる単位の集中荷重が一定速度  $v_0$  で走行するとき、任意点の撓みのレスポンスを求める。この場合における  $m$  次のモードに対する運動方程式はすでに式 (3.2.4.4) に与えてある。さて  $x_i$  点を測定点とすれば、式 (3.2.2.4) の右辺は対称・逆対称モードについて、それぞれ式 (3.2.6.1), (3.2.6.2) のようになる。

$m = 1, 3, 5, \dots$  のとき



$$\begin{aligned}\bar{\Phi}_m(x=x_i) \bar{\Phi}_m(x_j=v_0 t) &= A_m \bar{\Phi}_m(v_0 t) \\ &= A_m C_m \sum_{n=1,3,5,\dots} b_{mn} \sin \frac{n\pi v_0 t}{l} = \sum_{n=1,3,5,\dots} A_{mn} \sin \frac{n\pi v_0 t}{l}\end{aligned}\quad (3.2.6.1)$$

== 12  $A_{mn} = A_m C_m b_{mn}$  とおく。

$m = 2, 4, 6, \dots$  のとき

$$\begin{aligned}\bar{\Phi}_m(x=x_i) \bar{\Phi}_m(x_j=v_0 t) &= \bar{\Phi}_{gm}(x=x_i) \bar{\Phi}_{gm}(x_j=v_0 t) \\ &= \frac{2}{\rho l} \sin \frac{m\pi x_i}{l} \sin \frac{m\pi v_0 t}{l} = B_m \sin \frac{m\pi v_0 t}{l}\end{aligned}\quad (3.2.6.2)$$

== 12  $B_m = \frac{2}{\rho l} \sin \frac{m\pi x_i}{l}$  とおく

よって対称・逆対称モードに対する運動方程式はそれぞれ式 (3.2.6.3), (3.2.6.4) に与えられる。

$$\ddot{W}_m + \omega_m^2 W_m = \sum_{n=1,3,5,\dots} A_{mn} \sin \frac{n\pi v_0 t}{l} \quad (3.2.6.3)$$

$$\ddot{W}_{gm} + \omega_{gm}^2 W_{gm} = B_m \sin \frac{m\pi v_0 t}{l} \quad (3.2.6.4)$$

式 (3.2.6.3) と式 (3.2.6.4) とを,  $t=0$  のとき  $W=0$ ,  $\dot{W}=0$  の初期条件を入れて一般解を求めて整理すると, それぞれ式 (3.2.6.5), (3.2.6.6) となる。

$$W_m = \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{A_{mn}}{\omega_m^2 - (ne)^2} \left\{ \sin(net) - \frac{ne}{\omega_m} \sin \omega_m t \right\} \quad (3.2.6.5)$$

$$\tilde{w}_{gm} = \frac{B_m}{\omega_{gm}^2 - (me)^2} \left\{ \sin(met) - \frac{me}{\omega_{gm}} \sin \omega_{gm} t \right\} \quad \text{-----} \quad (3.2.6.6)$$

$$\text{ここに } e = \pi v_0 / \ell$$

よって求める撓みのレスポンスは両者の和によって与えられる。すなわち、

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \tilde{w}_m \quad (3.2.6.7)$$

前にも記したが、後の数値計算の節でもわかるように高次のモードによるたわみはきわめて小さいので、 $m = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ までとり、対称モードの場合  $n = 1, 3, 5, 7, 9$ までをとって動的撓みの解を数値計算に便利ないようにまとめると、次式を得る。

$$\begin{aligned} w = & \left[ \left( \sum_{m=1,3,5} \frac{A_{m1}}{\omega_m^2 - e^2} \right) \sin et + \left( \sum_{m=1,3,5} \frac{A_{m3}}{\omega_m^2 - (3e)^2} \right) \sin 3et \right. \\ & \left. + \left( \sum_{m=1,3,5} \frac{A_{m5}}{\omega_m^2 - (5e)^2} \right) \sin 5et + \text{-----} \right] \\ & - \left[ \left( \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{n A_{1n}}{\omega_1^2 - (ne)^2} \right) \frac{e}{\omega_1} \sin \omega_1 t + \left( \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{n A_{3n}}{\omega_3^2 - (ne)^2} \right) \frac{e}{\omega_3} \right. \\ & \left. \sin \omega_3 t + \left( \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{n A_{5n}}{\omega_5^2 - (ne)^2} \right) \frac{e}{\omega_5} \sin \omega_5 t + \text{-----} \right] \\ & + \sum_{m=2,4,6} \left[ \frac{B_m}{\omega_{gm}^2 - (me)^2} \left( \sin met - \frac{me}{\omega_{gm}} \sin \omega_{gm} t \right) \right] \quad (3.2.6.8) \end{aligned}$$

上のレスポンスは速度一定の場合であるが、任意の速度変化が

ある場合に対しても別にその解を求めることができる(2.2参照)。式(3.2.6.8)において、 $e=0$ のときが静的撓み  $W_s$  を与えるので、動的増加たわみ  $\Delta W_d$  は次のようになる。

$$\Delta W_d = W - W_s \quad (3.2.6.9)$$

ここで、実座橋においては一般に  $\omega_m \gg e$  であるから、

$$\frac{1}{1-x^2} \doteq 1+x^2$$

の展開式を用いて式(3.2.6.8)を展開し、式(3.2.6.9)を次のように整理する。

$$\begin{aligned} \Delta W_d = & \left[ e^2 \left( \sum_{m=1,3,5,\dots} \frac{A_{m1}}{\omega_m^4} \right) \sin et + (3e)^2 \left( \sum_{m=1,3,5,\dots} \frac{A_{m3}}{\omega_m^4} \right) \sin 3et \right. \\ & \left. + (5e)^2 \left( \sum_{m=1,3,5,\dots} \frac{A_{m5}}{\omega_m^4} \right) \sin 5et + \dots \right] \\ & - \left[ \frac{e}{\omega_1} \left( \sum_{n=2,3,5,\dots} \frac{n A_{1n}}{\omega_1^2 - (ne)^2} \right) \sin \omega_1 t + \frac{e}{\omega_3} \left( \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{n A_{3n}}{\omega_3^2 - (ne)^2} \right) \sin \omega_3 t \right. \\ & \left. + \frac{e}{\omega_5} \left( \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{n A_{5n}}{\omega_5^2 - (ne)^2} \right) \sin \omega_5 t + \dots \right] \\ & + \left[ \sum_{m=2,4,6,\dots} \left( \frac{me}{\omega_{gm}} \right)^2 \cdot \frac{B_m}{\omega_{gm}^2} \cdot \sin met - \sum_{m=2,4,6,\dots} \frac{me}{\omega_{gm}} \cdot \frac{B_m}{\omega_{gm}^2 - (me)^2} \sin \omega_{gm} t \right] \end{aligned} \quad (3.2.6.10)$$

### 3.2.7 アーチと補剛桁との偏心結合による影響

これまでの解析においては、3.2.1の仮定に示すように、支承上

において補剛桁図心線とアーチ軸線との間には偏心がないものとして解析を進めてきた。上の仮定は一般のランガー桁の場合には充分成立することは静力学的に検討できる。しかし、ラングートラスの場合一般にスパンまたはライズに比べて桁高がかなり大きいので、これらのものを上の仮定を用いて数値計算を行うと理論的に疑問が残る結果が得られる。補剛トラスの取り扱いには注意すべき点があるけれども、一般にはこの偏心の影響を考慮して数値計算を行った方が良好な結果が得られるようであるから、ラングートラスを偏心結合されたランガー桁とみなし、その基礎式も変形等置法により誘導してみる。なお、この場合においても対称振動時にはアーチは全く作用せずに補剛桁のみの振動となるので、対称振動のものについて考えれば充分である。

変形等置法では、まずアーチと補剛桁(単純梁)とに分離して解析するが、ここでもこの両者をそれぞれ独立に解析し、最後にこれらを一体として結合する方法をとる。

図-3.2.7.1に示すように  $p_g \sin \omega t$  なる等分布周期力が単純梁上に作用するとき、そのレスポンスは式(2.2.5), (2.2.28)により次式によって与えられる。

$$w'_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} w_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Phi_n(x)}{\omega_{gn}^2 - \omega^2} \left\{ \int p_g \Phi_n(x) dx \right\} \sin \omega t \quad (3.2.7.1)$$

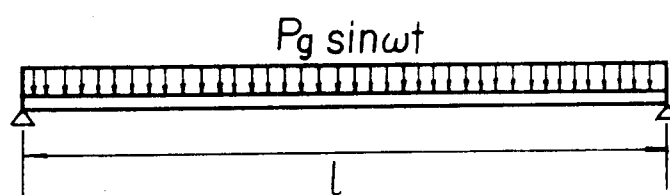


Fig.3.2.7.1

また、モーメント荷重  $M_0 \sin \omega t$  が単純梁の両端に作用するとき（図-3.2.7.2 参照），そのレスポンスは式（2.2.30）

$$w_m = \frac{1}{\omega_m^2 - \omega^2} \Phi_m(x) \Phi'_m(x_j) M_0 \sin \omega t \quad (3.2.7.2)$$

$x_j$  : モーメント荷重の作用点の座標

により次式にて示される。

$$\begin{aligned} w'_2(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} w_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Phi_n(x)}{\omega_{gn}^2 - \omega^2} \left\{ \Phi'_n(x_j=0)(-M_0) + \Phi'_n(x_j=l)M_0 \right\} \\ &\times \sin \omega t = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2\Phi_n(x)}{\omega_{gn}^2 - \omega^2} \cdot \Phi'_n(x_j=0) M_0 \sin \omega t \end{aligned} \quad (3.2.7.3)$$

ここにモーメント荷重は時計回り方向を正とした。また単純梁の場合  $\Phi'_n(x=0) = -\Phi'_n(x=l)$  の関係がある。等分布周期力  $p_g \sin \omega t$  および端モーメント荷重  $M_0 \sin \omega t$  が作用するときの解がそれぞれ上記のように与えられるので，この両者が同時に作用するとき（図-3.2.7.3），そのレスポンスはこれらを重ね合わせて次のように求められる。

$$\begin{aligned} w &= w'_1(x) + w'_2(x) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Phi_n(x)}{\omega_{gn}^2 - \omega^2} \left[ \int_0^l p_g \Phi_n(x) dx - 2\Phi'_n(x_j=0) M_0 \right] \sin \omega t \end{aligned} \quad (3.2.7.4)$$

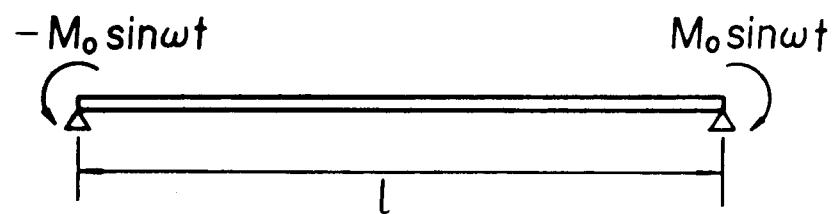


Fig.3.2.7.2

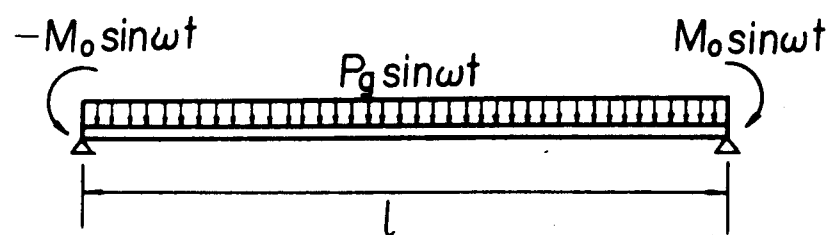


Fig.3.2.7.3

単純梁の振動モード  $\Phi_n(x)$  は正弦波関数であるから次式のように書きかえられる。

$$W = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\{\Phi_n(x)\}_{\max}}{\omega_{gn}^2 - \omega^2} \left[ \int_0^l p_g \Phi_n(x) dx - 2\Phi_n'(x_j=0) M_0 \right] \sin \frac{n\pi x}{l} \sin \omega t$$

----- (3.2.7.5)

次に適合条件式について考えてみる。いま、梁が図-3.2.7.4に示すように  $\Delta H_n$  なる軸力(引張力)をうけ

$$y_n = a_n \sin(n\pi x/l) \quad (3.2.7.6)$$

なる変形をしたときを考えると、上突縁の伸び  $\Delta l_n$  は次式によって示される。

$$\Delta l_n = \frac{l \cdot \Delta H_n}{A_g E} - 2e\theta_n \quad (3.2.7.7)$$

ここに

$$\theta_n = y_n' \Big|_{x=0} = a_n \frac{n\pi}{l} \left| \cos \frac{n\pi x}{l} \right|_{x=0} = \frac{n\pi a_n}{l}$$

また、ア-4が  $a_n \sin(n\pi x/l)$  の変形と  $\Delta H_n$  なる軸力をうけたとき、その水平方向の伸び  $\Delta l_{an}$  は式(3.2.2.8)

$$\Delta l_{an} = 16 \left( \frac{f}{l} \right) \cdot \frac{a_n}{n\pi} - \frac{\Delta H_n l}{A_a E} \left\{ 1 + 8 \left( \frac{f}{l} \right)^2 + 19.2 \left( \frac{f}{l} \right)^4 \right\} \quad (3.2.7.8)$$

がそのまま使用できる。この  $\Delta l_n$  と  $\Delta l_{an}$  とは等しい筈であるからこの両者を等置して適合条件式を得る。すなわち、

$$\Delta H_n = \frac{16 E f B}{l^2 \pi} \cdot \frac{a_n}{n} \left\{ 1 + \frac{\pi^2 e}{8 f} n^2 \right\} \quad (3.2.7.9)$$



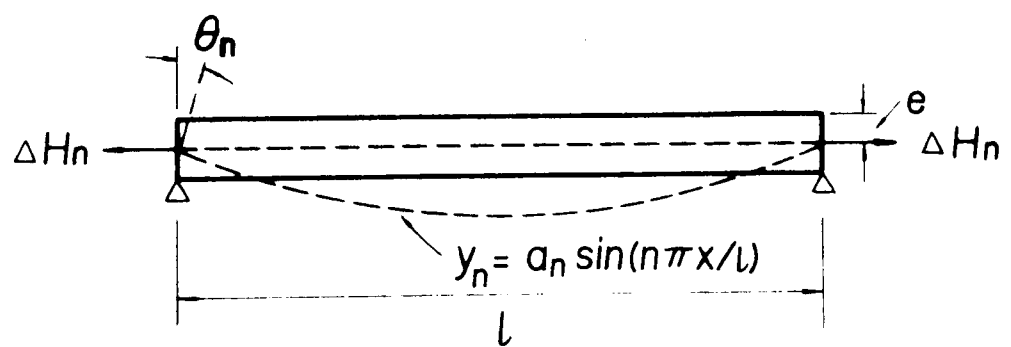


Fig. 3.2.7.4

ここに

$$B = \frac{A_a A_g}{A_a + A_g \left\{ 1 + 8 \left( \frac{f}{l} \right)^2 + 19.2 \left( \frac{f}{l} \right)^4 \right\}}$$

式(3.2.7.9)は、ランガー桁が  $a_n \sin(n\pi x/l)$  の変形をしたときアーチに生じる軸力を決定する式であるので、逆にランガー桁に

$$y = \sum_n a_n \sin \frac{n\pi x}{l} \quad (3.2.7.10)$$

の変形を与えたとき、アーチに生じる軸力  $\Delta H$  は

$$\Delta H = \sum_n \Delta H_n = \sum_n \frac{16 E f B}{l^2 \pi} \cdot \frac{a_n}{n} \left\{ 1 + \frac{\pi^2 e}{8 f} n^2 \right\} \quad (3.2.7.11)$$

により与えられることがわかる。したがって、いま式(3.2.7.5)にて示される変形をランガー桁に強制的に与えたとき、アーチには次式によってあらわされる軸力  $\Delta H$  が生じている筈である。

$$\Delta H = \frac{16 E f B}{l^2 \pi} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{n} \left\{ 1 + \frac{n^2 \pi^2 e}{8 f} \right\} \frac{\{\Phi_n(x)\}_{\max}}{\omega_{gn}^2 - \omega^2} \left\{ \int_0^l p_g \Phi_n(x) dx - 2 \Phi_n'(x_j=0) M_0 \right\} \right] \sin \omega t \quad (3.2.7.12)$$

( $n = 1, 3, 5, \dots$ )

ランガー桁が式(3.2.7.5)により与えられる変形を行い、その結果アーチに作用する軸力  $\Delta H$  が式(3.2.7.12)により与えられたとき、アーチ部を補剛桁より切り離し、アーチ単独の安定性について検討してみよう。アーチが両端に  $\Delta H$  の水平軸力(圧縮力)を受けてい

るとき、このアーチを安定に保持させるには、式 (3.2.3.5) すなわち

$$p_0 = 8 \Delta H \cdot f / l^2 \quad (3.2.7.13)$$

により決定される等分布周期力  $p_a \sin \omega t$  を作用させる必要がある。式 (3.2.7.12) により与えられる軸力の場合には、この等分布荷重  $p_a$  は次式となる。

$$p_a = \frac{128 E f^2 B}{l^4 \pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{n} \left\{ 1 + \frac{\pi^2 e n^2}{8 f} \right\} \cdot \frac{\{\Phi_n(x)\}_{\max}}{\omega_{gn}^2 - \omega^2} \right. \\ \left. \times \left\{ \int_0^l p_g \Phi_n(x) dx - 2 \Phi'_m(x_j=0) M_0 \right\} \right\} \quad (3.2.7.14)$$

すなわち、アーチ部を単独に切り出し、これに式 (3.2.7.12) により与えられる水平推力  $\Delta H$  と式 (3.2.7.14) に与えられる等分布荷重とも同時に載荷すれば、このアーチは安定に保持され、しかもこのアーチは式 (3.2.7.5) により与えられる変形をしていることになる。

いま、このようにして決定した分布荷重  $p_a$  と軸力  $\Delta H$  とをアーチに作用させながら、一方補剛桁には  $p_g \sin \omega t$  なる等分布周期力と  $\Delta H$  なる水平推力を上突縁に作用させながら（これは中立軸について考えると  $\Delta H$  の軸力と

$$\Delta H \cdot e = M_0 \quad (3.2.7.15)$$

なる端モーメント荷重とが同時に作用しているのと等価である）、この両者を重ね合せて結合すると（図-3.2.7.5 参照）、ランガー

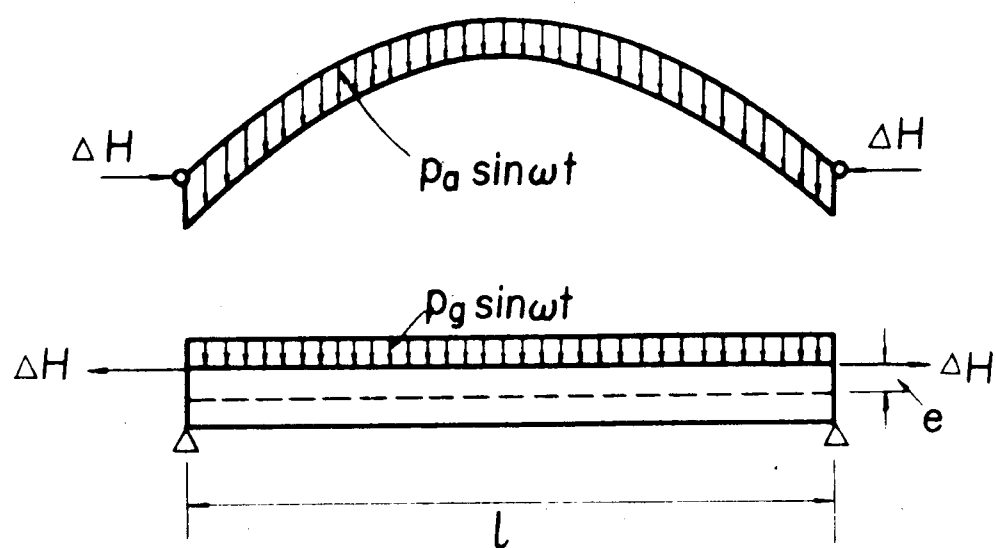


Fig.3.2.7.5

桁が組み立てられ、しかもこのようにしてでき上がったものには

$$p_a + p_g = p_0 \quad (3.2.7.16)$$

なる等分布外力が作用し、その変形は式(3.2.7.5)により与えられる変形をしていることになる。式(3.2.7.15)の関係を式(3.2.7.14)に代入すると

$$p_a = \frac{128 E f^2 B}{l^4 \pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{n} \left\{ 1 + \frac{n^2 e \pi^2}{8 f} \right\} \frac{\{\Phi_n(x)\}_{\max}}{\omega_{gn}^2 - \omega^2} \left\{ \int_0^l p_g \Phi_n(x) dx - 2 \Phi'_n(x_j=0) \frac{l^2 e p_a}{8 f} \right\} \right] \quad (3.2.7.17)$$

$$(n = 1, 3, 5, \dots)$$

さらに、ランガー桁が自由振動しているときには外力は零であるという条件、すなわち、

$$p_a + p_g = p_0 = 0$$

$$\text{または} \quad p_a = -p_g \quad (3.2.7.18)$$

を式(3.2.7.17)に使用すると、次式にて示される振動数方程式が得られる。

$$-1 = \frac{512 E f^2 B}{\rho \pi^2 l^4} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{n^2 (\omega_{gn}^2 - \omega^2)} \left\{ 1 + \frac{n^2 \pi^2 e}{8 f} \right\}^2 \right] \quad (3.2.7.19)$$

$$= \text{こに} \quad n = 1, 3, 5, \dots, \infty$$

上式の未知数は $\omega$ のみであるから、試算法により偏心結合されたランガー桁の固有振動数 $\omega_{em}$ 、すなわち $\omega_{e1}, \omega_{e3}, \omega_{e5},$

----- が容易に決定される。  $e=0$  とおけば式 (3.2.7.19) は当然 (3.2.3.7) となってしまう。

振動モードは、式 (3.2.7.19) より求めた固有振動数  $\omega_{em}$ , ( $m=1, 3, 5, \dots$ ) を式 (3.2.7.5) に代入し、これに式 (3.2.7.15) にて示される関係を使用すれば直ちに得られる。振動モード  $\varphi_m(x)$  はその振巾の大きさを自由に選定できるから、常数を省略すると

$$\varphi_m(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{n(\omega_{gn}^2 - \omega_{em}^2)} \cdot \left\{ 1 + \frac{n^2 \pi^2 e}{8f} \right\} \sin \frac{n\pi x}{l} \right] \quad (3.2.7.20)$$

$$(n=1, 3, 5, \dots)$$

となり、このときの正規化した振動モード  $\Phi_m(x)$  は次のように与えられる。

$$\Phi_m(x) = C_m \sum_{n=1}^{\infty} \left[ b_{mn} \sin \frac{n\pi x}{l} \right] \quad (3.2.7.21)$$

$$\text{ここに } C_m^2 = \frac{2}{Pl} \cdot \frac{1}{\sum_{n=1}^{\infty} b_{mn}^2}, \quad (n=1, 3, 5, \dots)$$

$$b_{mn} = \frac{1}{n(\omega_{gn}^2 - \omega_{em}^2)} \left\{ 1 + \frac{n^2 \pi^2 e}{8f} \right\}$$

振動数方程式 (式 (3.2.7.19)) と振動モードはともに無限項の級数和の計算を必要とする式によりあらわされているが、これらはいずれも収束性がよいので 3~5 項程度とって計算すれば実用

上満足できる精算値が得られる。

### 3.2.8 数値計算

これまでランガー桁橋の動的解析の理論を述べてきたが、ここでこれらの理論を使って、2つの橋、子飼橋（熊本市白川）と伊崎橋（宮崎県一ツ瀬川）（竣工後米良稻荷大橋と改名）について、固有振動数と振動モード、動的解析より得られた静的レスポンスと仮想仕事法により得られた撓みや曲げモーメントの影響線の比較、あるいは移動荷重が作用するときの動的レスポンスなどの計算を行ってみる。

#### (i) 橋の諸元について

この動的解析は、3.2.1に設けた仮定をもとして理論を進めてきたから、実在の橋の断面の常数をそれらの仮定に合致するように換算する必要がある。伊崎橋ではこのために、補剛桁の断面2次モーメントの換算にあたっては集中荷重が桁中点に作用するときの撓みを等置する方法、等分布荷重満載時の桁中点の撓みを等置する方法の2つを使ったところ、それぞれ  $I = 623.2 \times 10^4$ ,  $626.4 \times 10^4 (\text{cm}^4)$  となり大差ない。また補剛桁断面積の換算にあたっては、その軸方向力による伸びを等置す

る方法, 算術平均による方法の2つをとったところそれぞれ  $A_g = 562.35, 562.15 (\text{cm}^2)$  と大差ない。アーチ断面積の換算にあたっては, アーチの推力による軸線のちがみを等置する方法, 算術平均による方法とを比べたところそれぞれ  $A_a = 345.40, 344.93 (\text{cm}^2)$  と同じく大差なく, 吊材の断面換算にあたっては算術平均によって  $A_h = 95.440 (\text{cm}^2)$  を得た。これらの換算値を実断面定数とともに表-3.2.8.1に併記した。なお子飼橋では補剛桁および吊材断面は定断面であり, アーチ断面だけが変断面となっているの(じょう)と同様の要領でアーチの換算断面積  $A_a = 233.70 (\text{cm}^2)$  を得た。これらを表-3.2.8.2に示す。表-3.2.8.1, 表-3.2.8.2の中には静力学的解析に使用する断面値と動的解析に用いる断面値をまとめてある。

### (ii) 静力学的解析について

ランガー桁橋では, アーチは折線の滑節アーチでしかも断面が変化する, 一般に補剛桁も変断面である。このような構造をそのまま動的に解析することは非常に困難であるので, 3.2.1におけるような仮定<sup>\*</sup>を設けたわけであるが, このような仮定で静力学的に

<sup>\*</sup> 偏心結合されたランガー桁橋は3.2.7において取り扱ったが, 数値計算においては偏心の影響を無視することにする。



## 戸崎橋の諸元

	格点 No.		補剛桁				ア-キ		吊材
			$A_g (cm^2)$	$e (cm)$	$\delta (cm)$	$I_g (\times 10^6 cm^4)$	$A_a (cm^2)$	$I_a (\times 10^6 cm^4)$	$A_h (cm^2)$
実断面値	0	支承	552.6	40.0	-11.2	5.378	383.2	145.67	—
	1		499.0	,	-3.3	5.494	364.0	141.97	
	2		553.6	,	12.4	6.196	353.4	135.67	88.9
	3		568.8	,	24.2	6.370	343.8	133.82	88.9
	4	1/4	591.6	,	27.1	6.616	334.2	131.97	88.9
	5		586.8	,	31.1	6.487	328.6	128.47	80.9
	6		572.4	,	32.5	6.089	328.6	128.47	105.9
	7		572.4	,	36.6	6.089	328.6	125.72	105.9
	8	1/2			36.6				105.9
静力学解析断面値	厳密解		562.35	実橋のとき		6.2320	345.40		95.440
	簡易解(その1)		562.35	40.0	0	6.2320	345.40		$\infty$
	簡易解(その2)		562.35	0	0	6.2320	345.40		$\infty$
動的解析断面値			562.35	$e = \delta = 0$		6.2320	345.40		$\infty$

支間  $l = 139.2 \text{ m}$  , ライス  $f = 19.2 \text{ m}$  , 橋全質量  $p l = 442.17 \text{ kg} \cdot \text{sec}^2 / \text{cm}$

格点数 16

(注)  $e$  は補剛桁端における骨組線と桁中心線との偏心量

$\delta$  は補剛桁中心線と固心との偏心量

表-3.2.8.1

## 子飼橋の諸元

	格桌 No.		補剛桁			ア - 4		吊材
			$A_g(\text{cm}^2)$	$e(\text{cm})$	$I_g(\times 10^6 \text{cm}^4)$	$A_a(\text{cm}^2)$	$I_a(\times 10^3 \text{cm}^4)$	$A_h(\text{cm}^2)$
実断面値	0	支承	381.5	17.83	1.6795	241.88	34.088	—
	1		•	•	•	•	•	48.72
	2		•	•	•	•	•	•
	3		•	•	•	•	•	•
	4		•	•	•	•	•	•
	5	1/2	•	•	•	•	•	•
静力学の解 析断面値	厳密解		381.5	17.83	1.6795	233.70		48.72
	簡易解		381.5	0	1.6795	233.70		$\infty$
動的解析 断面値			381.5	0	1.6795	233.70		$\infty$

支間  $l = 57.2 \text{ m}$  , ライス  $f = 9.00 \text{ m}$  , 橋全質量  $pl = 186.08 \text{ kg} \cdot \text{sec}^2/\text{cm}$

格間数 10

表 - 3.2.8.2

解いた撓みや曲げモーメントの値が、静力学的厳密解に比べてどの程度の精度を持つものであるか、また同じ仮定の下で解いた静力学的解析結果と動的解析から得た静的解とがどのように一致するかを知るために、次のいくつかの計算を行なった。

その解析法の一つは、表-3.2.8.1、表-3.2.8.2の厳密解の欄の断面値を用い、折線アーチとして通常仮想仕事法で解いたいわゆる厳密解である。他の方法は表中の簡易解の欄の断面値を使用し、アーチを滑らかな放物線アーチとして仮想仕事法によって解いたいわゆる簡易解である。なおこの簡易解では吊材の断面積  $A_h = \infty$  といった場合について、偏心結合を考慮した場合と偏心  $e = 0$  のときとの2つの場合についても比較を行なった。最後の場合すなわち、 $A_h = \infty$ 、 $e = 0$  の場合が3.2.1において述べた仮定すべてを満足するものであるから、これの静力学的解析結果と3.2.5の動的解析結果とは一致すべきものである。

#### (A) 子飼橋の静力学的解析

表-3.2.8.2の厳密解の断面値を用いて、折線アーチのランガー桁橋として解いたときと、簡易解欄のように  $e = 0$ 、 $A_h = \infty$  として解いたときの影響線のうち  $y_3$ -線、 $M_3$ -線を掲げて比較すれば表-3.2.8.3が得られる。ただし添字の3は格点3を

## (子飼橋) 影響線

荷重 格点	$y_{3L/10}$ - 線 ( $\times 10^{-3} \text{ cm/t}$ )			$M_{3L/10}$ - 線 (m)		
	嚴密解	簡易解	比(%)	嚴密解	簡易解	比(%)
1	41.763	42.078	100.8	1.1207	1.1447	102.1
2	75.900	75.911	100.0	2.5595	2.5984	101.5
3	87.723	87.258	99.5	4.5577	4.6059	101.1
4	65.013	64.170	98.7	1.5687	1.6220	103.4
5	24.553	23.550	95.7	-0.5829	-0.5282	90.6
4'	-14.602	-15.421	105.6	-1.8633	-1.8100	97.1
3'	-39.637	-40.091	101.1	-2.3063	-2.2581	97.9
2'	-44.372	-44.363	100.0	-2.0165	-1.9776	98.1
1'	-29.005	-28.673	98.9	-1.1673	-1.1433	98.0

(注) 簡易解 :  $e=0$  ,  $A_h = \infty$ 

表 - 3.2.8.3

示す。この表より両者は2%以下の誤差で一致することがわかる。影響係数値の小なるものの精度が落ちるのは止むを得ない。

### (B) ヲ崎橋の静力学的解析

ヲ崎橋は表-3.2.8.1に見るように支間139.2m, 有効巾員6.0mの一等橋で完成時には日本一の支間を誇るものであった。この橋については表-3.2.8.1の静力学的解析断面の欄に見るように、厳密解欄の断面を使って厳密に解析した場合と、簡易計算欄の(その1), (その2)の断面を用いた2つの場合とを解析した。すなわち簡易解では $A_h = \infty$ に対して、桁端の偏心 $e=0$ の場合と $e=40.0$ cmの場合の2つを解析した。この3者における影響線のうち $M_{1/4}$ -線,  $M_{3/4}$ -線を例示すれば表-3.2.8.4, 表-3.2.8.5のようになる。影響係数値の小さいもの、とくに正負の符号の変わる附近のものの誤差が大となるのはやむを得ない所であるが、その他の影響値については簡易計算法の精度のよいことが知られると思う。

### (iii) 固有振動数 $\omega_m$ と振動モード $\Phi_m(x)$ について

動的解析を行うにあたっては、まず固有振動数 $\omega_m$ と振動モード $\Phi_m(x)$ とを各振動次数に対して求めておかねばならないので、これの数値計算を示すことにする。なお、動的に解析するランガー

## (戸崎橋) 撓みの影響線

荷重 格点	$y_{14}$ - 線 $\times 10^{-3} \text{ cm/t}$				
	厳密解	簡易解 (その1) $c=40, A_h=\infty$ 比(%)		簡易解 (その2) $c=0, A_h=\infty$ 比(%)	
1	112.47	112.11	99.7	114.65	101.9
2	213.40	213.66	100.1	217.11	101.7
3	287.78	288.76	100.3	291.84	101.4
4	316.48	318.12	100.5	320.67	101.3
5	284.92	287.14	100.8	288.69	101.6
6	210.32	212.97	101.3	213.61	102.7
7	112.35	115.40	102.7	115.40	103.7
8	9.26	12.45	134.5	12.20	131.7
7'	- 84.72	- 81.68	96.4	- 81.66	97.9
6'	- 158.67	- 156.02	98.3	- 155.38	98.2
5'	- 205.26	- 203.04	98.9	- 201.48	98.2
4'	- 220.23	- 218.59	99.3	- 216.04	98.0
3'	- 202.80	- 201.82	99.5	- 198.74	97.8
2'	- 155.59	- 155.33	99.8	- 151.88	97.6
1'	- 84.60	- 84.96	100.4	- 82.42	97.4

表 - 3.2.8.4

## (戸崎橋) 曲げモーメントの影響線

$M_{1/4}$ - 線 (m)				
厳密解	簡易解(その1) $e=40, A_h=\infty$	比 (%)	簡易解(その2) $e=0, A_h=\infty$	比 (%)
2.5232	2.5194	99.9	2.5425	100.8
5.1959	5.2248	100.6	5.2595	101.2
8.2193	8.2651	100.6	8.3037	101.0
11.7058	11.7668	100.5	11.8044	100.8
7.0597	7.1329	101.0	7.1674	101.5
3.0617	3.1442	102.7	3.1755	103.7
-0.2310	-0.1420	61.5	-0.1138	49.3
-2.7823	-2.6712	96.7	-2.6641	95.8
-4.5810	-4.4920	98.1	-4.4638	97.4
-5.6383	-5.5558	98.6	-5.5245	98.0
-5.9904	-5.9171	98.8	-5.8826	98.2
-5.6942	-5.6332	98.9	-5.5956	98.3
-4.8307	-4.7849	99.1	-4.7463	98.3
-3.5041	-3.4752	99.2	-3.4405	98.2
-1.8268	-1.8305	100.2	-1.8075	98.9

表 - 3.2.8.5

桁橋は 3.2.1 の仮定のもの，すなわち表-3.2.8.1，表-3.2.8.2 の静力学的簡易解で取り扱ったもののうち， $e=0$ ， $A_h=\infty$  のものである。

### (A) 戸崎橋

対稱振動における振動数方程式は，式(3.2.3.7)により与えられるがこの式の中には補剛桁の固有振動数  $\omega_{gn}$  が入っている。この  $\omega_{gn}$  は式(3.2.3.3')をそのまま使ってよいわけであるから，戸崎橋に対してこれを求めると

$$\omega_{gn}^2 = 1.06892 n^4.$$

これを他の常数とともに式(3.2.3.7)に入れると，次の振動数方程式が得られる。

$$1 + 65.5849 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 (1.06892 n^4 - \omega^2)} = 0 \quad (3.2.8.1)$$

上式からランガー桁橋の  $\omega_1$ ， $\omega_3$ ， $\omega_5$ ，……が試算によって容易に求められる。 $\omega_5$  の試算を例示すると表-3.2.8.6 のようである。表-3.2.8.6 の  $\Sigma$  欄が -1 になるように  $\omega_5$  の小数第 3 桁を直線補間によって求めて

$$\omega_5 = 25.905 \text{ (rad/sec)}$$

を得る。このようにして求めた戸崎橋の対稱時の固有振動数を



(戸崎橋)  $\omega_s$  の試算

$n$	$n^2$	$n^4$	$\xi = 1.06892n^4$	$\omega_s$	$\omega_s^2$	$\xi - \omega_s^2 = \zeta$	$\zeta n^2$	$\eta_n = 65.5849/\zeta n^2$	$\sum \eta_n$
1	1	1	1.06892			-669.741	-669.741	-0.09793	
3	9	81	86.5825	25.90	670.810	-584.228	-5258.050	-0.01247	-1.06888
5	25	625	668.0750			-2.735	-68.375	-0.95919	
7	49	2401	2566.4769			1895.670	92887.7	0.00071	
1						-670.259	-670.259	-0.09785	
3				25.91	671.328	-584.746	-5262.71	-0.01246	-0.91603
5						-3.2531	-81.3275	-0.80643	
7								0.00071	

表-3.2.8.6

## (戸崎橋) 固有振動数と固有周期

ランガー桁橋						補剛桁の対称振動		
対称振動			逆対称振動					
次数	$\omega_m$	$T_m$	次数	$\omega_{gm}$	$T_{gm}$	次数	$\omega_{gm}$	$T_{gm}$
1	7.375	0.85213 (0.852)	2	4.1356	1.5193	1	1.0339	6.0772
3	10.287	0.61079 (0.611)	4	16.542	0.37983	3	9.3051	0.67524
5	25.904	0.24256 (0.243)	6	37.220	0.16881	5	25.848	0.24308

単位  $\omega$  : rad/sec ;  $T$  : sec

( ) 値 はエネルギー法 による数値

表-3.2.8.7

まとめると表-3.2.8.7のようになる。また逆対称振動数は式(3.2.3.11)から求められる。これらを計算して表-3.2.8.7に併記する。さらに後のレスポンスの計算に必要な補剛桁のみの固有振動数 $\omega_{g1}$ ,  $\omega_{g3}$ ,  $\omega_{g5}$ をも式(3.2.3.11)から計算して表-3.2.8.7にまとめた。なお、 $R_{ij}$ のエネルギー法によって得た値をも参考のために付記した。

正規化した振動モード $\Phi_m(x)$ は式(3.2.3.10)によって決定されるが、この式中の $\omega_{gn}$ は式(3.2.3.3')によって定まるので、対称モードのうち $m=5$ の場合の $\Phi_m(x)$ の計算を例示すると表-3.2.8.8の通りである。

表-3.2.8.8よりモードの各成分のうち $n=7$ より高次の項は、振中の最大項に対して省略してよい程微小であることがわかる。このように $n=7$ より高次の項で無視できることは、固有振動数の決定に際しても云えることであり、このことは表-3.2.8.6の $\eta_n$ 値を見れば直ちに理解できる。 $m=1, 3, 5$ について、それらを比べると表-3.2.8.9のようになる。参考のためにエネルギー法によって得た結果をも併記した。この $\Phi_m(x)$ を図-3.2.8.1に示す。

### (B) 子飼橋

補剛桁の固有振動数 $\omega_{gn}$ は

(戸崎橋)  $\Phi_5(x)$  の計算例

$n$	$\omega_{gn}^2$	$\omega_{gn}^2 - \omega_s^2$	$n(\omega_{gn}^2 - \omega_s^2)$	$b_{5n}$	$C_s$	$C_s b_{5n}$
1	1.0689	-670.0001	-670.0001	-1.4925 $\times 10^{-3}$	1.0065 $\times 10^{-3}$	-1.5022 $\times 10^{-3}$
3	86.5825	-584.4865	-1753.4595	-0.5703		-0.5740
5	668.0750	-2.9940	-14.9700	-66.8003		-67.2350
7	2566.4769	1895.4079	13267.8553	0.0754		0.0759
9	7613.1841	6942.1151	63118.6569	0.0158		0.0159

表-3.2.8.8

(戸崎橋)  $\Phi_n(x)$  の各成分

$\Phi_n(x)$	振巾	$C_{mbm1}$	$C_{mbm3}$	$C_{mbm5}$	$C_{mbm5}$	$C_{mbm7}$
$\Phi_1(x)$	エネルギー法	-58.883	32.476	1.0228	—	—
	変形等置法	-58.879	32.486	1.0232	0.179	0.047
	比 (%)	100.16	99.96	99.96	—	—
$\Phi_3(x)$	エネルギー法	32.479	-58.876	1.2100	—	—
	変形等置法	32.451	-58.894	1.2092	0.197	0.050
	比 (%)	100.09	99.97	100.07	—	—
$\Phi_5(x)$	エネルギー法	1.4797	0.56539	67.235	—	—
	変形等置法	1.5022	0.57401	67.235	0.076	0.016
	比 (%)	98.50	98.50	100.00	—	—

表-3.2.8.9

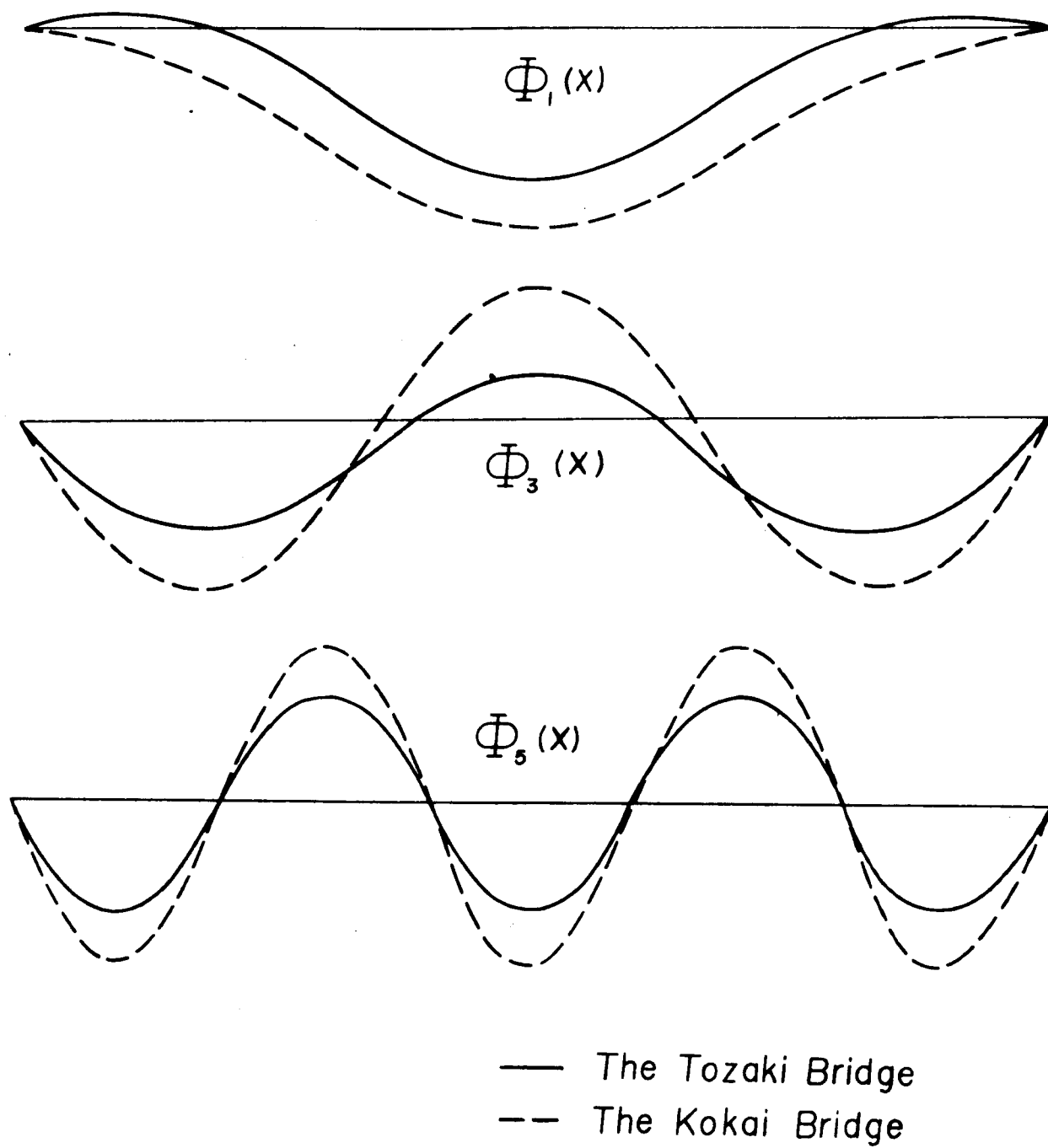


Fig.3.2.8.1

$$\omega_{gn}^2 = 9.86434 n^4$$

により与えられるから、対稱時の振動数方程式は

$$1 + 324.8075 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(9.86434 n^4 - \omega^2)} = 0 \quad (3.2.8.2)$$

となる。これを解いて表-3.2.8.10を得る。これらはエネルギー法によっても全く一致した結果となる。対稱モードを式(3.2.3.10)より決定し、その各成分を表-3.2.8.11に示す。この振動モードを図-3.2.8.1に示した。

#### (iv) 固有振動数の実測値と理論値との比較

予崎橋の固有振動数の実測値と理論値との比較を表-3.2.8.12に示す。実測値は、予崎橋では起振機テストおよび自動車走行後の自由振動よりえたものである。表-3.2.8.12に見るように実測値と理論値との比は平均90.7%となっている。静的載荷試験においては、実橋の撓み剛性は理論的に振う構造の剛性よりも大であるから、固有周期においても実験値の方が小さいのは当然のことである。すなわち、式(3.2.5.1)あるいは式(3.2.5.2)から知れるように、撓みは $\omega_m^2$ に逆比例するから、理論的には撓み比は周期比の2乗に比例すべきものである。予飼橋の固有周期を比べると表-3.2.8.13のようになる。

## (子飼橋) 固有振動数

(rad/sec)

ランカー桁橋				補剛桁	
対称振動		逆対称振動		対称振動	
m	$\omega_m$	m	$\omega_m$	m	$\omega_m$
1	17.654	2	12.563	1	3.1408
3	29.282	4	50.253	3	28.267
5	78.607	6	113.07	5	78.520

表 - 3.2.8.10

(子飼橋)  $\Phi_m(x)$  の各成分

$\Phi_m(x)$	振巾	$C_{mbm1}$	$C_{mbm3}$	$C_{mbm5}$	$C_{mbm7}$	$C_{mbm9}$
$\Phi_1(x)$	エネルギー法	-10.1526	2.0964	0.10473	—	—
	変形等置法	-10.1521	2.0956	0.10469	0.01872	0.00530
	比 (%)	100.00	100.04	100.04	—	—
$\Phi_3(x)$	エネルギー法	-2.1052	-10.1511	0.067039	—	—
	変形等置法	-2.0955	-10.1525	0.066910	0.01112	0.00309
	比 (%)	100.46	99.99	100.19	—	—
$\Phi_5(x)$	エネルギー法	0.12102	0.04447	10.3664	—	—
	変形等置法	0.11631	0.04446	10.3660	0.00585	0.00136
	比 (%)	104.04	100.02	100.00	—	—

表 - 3.2.8.11

## (戸崎橋) 固有周期

		理論値 (sec)		実験値 (sec)	比 %
		エネルギー法	変形等置法		
対称 振動	1	0.852	0.852	0.876	92.2
	3	0.611	0.611	0.509	83.3
	5	0.243	0.243	0.216	88.9
	7	—	0.124	—	—
逆対称 振動	2	1.519	1.519	1.370	90.2
	4	0.380	0.380	0.364	95.8
	6	0.169	0.169	0.160	94.7

表-3.2.8.12

## (子飼橋) 固有周期

		理論値 (sec)		実験値 (sec)	比 (%)
		エネルギー法	変形等置法		
対称	1	0.356	0.356	0.344	96.6
逆対称	2	0.500	0.500	0.432	86.4

表-3.2.8.13

## (V) 動的解析による静的撓みと曲げモーメントの計算

動的解析によって静的撓みあるいは撓みの影響線を求めるには式(3.2.5.5)によればよいが、これの第2項と第3項は式(3.2.5.2)と式(3.2.5.3)を用いる必要がある。この2式は $\omega_m$ と $\omega_{gm}$ および正規化モードがわかれば計算できる。ところで表-3.2.8.7, 表-3.2.8.9 および表-3.2.8.11 よりわかるように、 $Ritz$  のエネルギー法によって得られる固有振動数と振動モードは変形等置法によって得られる値とほとんど同じである。従って、いずれの方法によっても撓みの解は一致すべきものである。併しなから、変形等置法では $n$ を7, 9と高次項までとっても容易に計算できるけれども $Ritz$ の方法では $n=5$ より大きくとって計算するには数値計算が容易でない。このようなわけで、この高次の項の影響が結果的にどの程度のものとなるかを検討するために変形等置法では $n$ を9までとり、エネルギー法では $n$ を5までとって比較することにする。

静的曲げモーメントの計算には、式(3.2.5.6), (3.2.5.7)と式(3.2.5.8)を用いればよい。これについても上と同様の計算を行なうと、この両方の理論による動的解析結果と静力学的解析結果とを比較してみる。



## (A) 戸崎橋

式(3.2.5.5)の3項の数値を項別に示し、 $l/2$ 点のたわみの影響線を求めると表-3.2.8.14のようになる。同表中には動的解析から得た影響係数と静力学的解析(表-3.2.8.1の簡易解その2)から得た値とも比べ精度をしらべている。また同様に $l/4$ 点の撓み、 $l/2$ 点および $l/4$ 点の曲げモーメントの影響線を比べると表-3.2.8.15のようになる。

表-3.2.8.14, 表-3.2.8.15にみるように静力学的に得た影響係数と動的解析とくに変形等置法において $\overline{m}(x)$ を $n=9$ までとった場合とは完全に一致し、この動的解析理論の正しいことが知られると思う。曲げモーメント影響線において式(3.2.5.6)の3項の重ね合せを図に示すと図-3.2.8.2のようになる。また上の影響線を図示すると図-3.2.8.3～図-3.2.8.5となる。

## (B) 子飼橋

子飼橋についても上と同様の計算を行なった。しかしながらこの橋では静力学的解析では影響係数を各格点に対して求め、動的解析では16等分点に対して求めたので数値的に精度を記すことはできないが、 $y_{l/2}$ -線、 $M_{l/2}$ -線について両者を比べると表-3.2.8.16のようになる。これを図に示すと図-3.2.

(戸崎橋) 撓みの影響線 ( $l/2$  点) $\times 10^{-6} \text{ cm/kg}$ 

荷重 位置	格点 No.	動的解析				静力学的 解析	比(%)
		$W_{g\infty}$	$W_{g1} + W_{g3} + W_{g5}$	$W_1 + W_3 + W_5$	$W(x_i = l/2)$		
$l/16$	1	800.8721	802.1328 (802.143)	-16.7910 (-16.487)	-18.05 (-17.76)	-18.07	99.9 (98.3)
$2l/16$	2	1576.5858	1577.3199 (1577.341)	-24.7445 (-24.1706)	-25.48 (-25.46)	-25.43	100.2 (100.1)
$3l/16$	3	2301.9830	2300.9854 (2301.015)	-16.8326 (-17.138)	-15.84 (-16.16)	-16.10	98.4 (100.4)
$4l/16$	4	2951.9054	2950.4032 (2950.442)	10.6934 (10.469)	12.20 (11.93)	-12.21	99.9 (97.9)
$5l/16$	5	3501.1946	3501.5411 (3501.587)	55.5286 (55.567)	55.18 (55.15)	55.23	99.9 (99.9)
$6l/16$	6	3924.6924	3926.8074 (3926.859)	107.1211 (107.12)	105.01 (104.95)	105.00	100.1 (100.0)
$7l/16$	7	4197.2404	4197.4024 (4197.458)	148.6719 (148.41)	148.51 (147.76)	148.51	100.0 (99.5)
$8l/16$	8	4293.6805	4290.5228 (4290.583)	164.6199 (164.22)	167.78 (167.32)	167.78	100.0 (99.7)

(注) 動的解析のうち( )内はエネルギー法

## (戸崎橋) 影響線

格点 No.	y <sub>L/4</sub> -線 (x10 <sup>-6</sup> cm/kg)			M <sub>L/2</sub> -線 (cm)			M <sub>L/4</sub> -線 (cm)		
	動的解析	静力学	比(%)	動的解析	静力学	比(%)	動的解析	静力学	比(%)
1	114.68	114.65	100.0	-96.15 (96.84)	-95.60	100.6 (101.3)	254.52	254.25	100.1
2	217.10	217.11	100.0	-169.04 (170.82)	-168.74	100.2 (101.2)	526.36	525.95	100.1
3	291.66	291.84	99.9	-198.25 (201.08)	-197.84	100.2 (101.6)	830.87	830.37	100.1
4	320.67	320.67	100.0	-166.66 (170.12)	-166.08	100.3 (102.4)	1180.95	1180.44	100.0
5	289.08	288.69	100.1	-60.11 (63.96)	-59.34	101.3 (107.8)	717.22	716.74	100.1
6	213.61	213.61	100.0	132.53 (128.19)	133.33	99.4 (96.1)	317.99	317.55	100.1
7	115.40	115.40	100.0	419.04 (414.15)	419.82	99.8 (98.6)	-10.88	-11.38	95.6
8	12.40	12.20	101.6	804.02 (798.90)	804.79	99.9 (99.3)	-265.90	-266.41	99.8
7'	-81.67	-81.66	100.0				-445.88	-446.38	99.9
6'	-155.38	-155.38	100.0				-552.01	-552.45	99.9
5'	-201.51	-201.48	100.0				-587.78	-588.26	99.9
4'	-216.04	-216.04	100.0				-559.05	-559.56	99.9
3'	-198.53	-198.74	99.9				-474.13	-474.63	99.9
2'	-151.89	-151.88	100.0				-343.64	-344.05	99.9
1'	-82.40	-82.42	100.0				-180.48	-180.75	99.9

(注): ( ) 内はエネルギー法

表-3.2.8.15

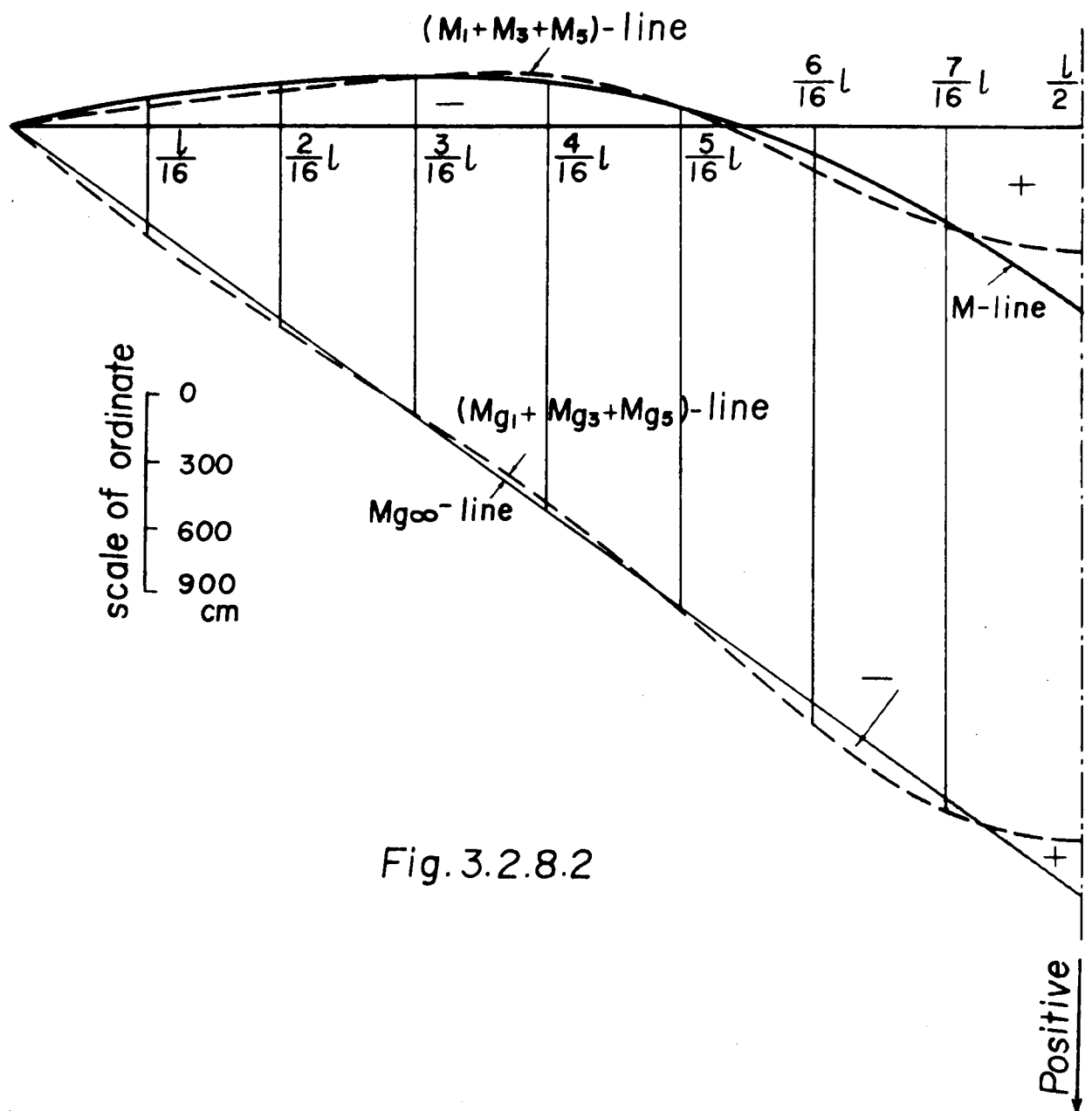


Fig. 3.2.8.2

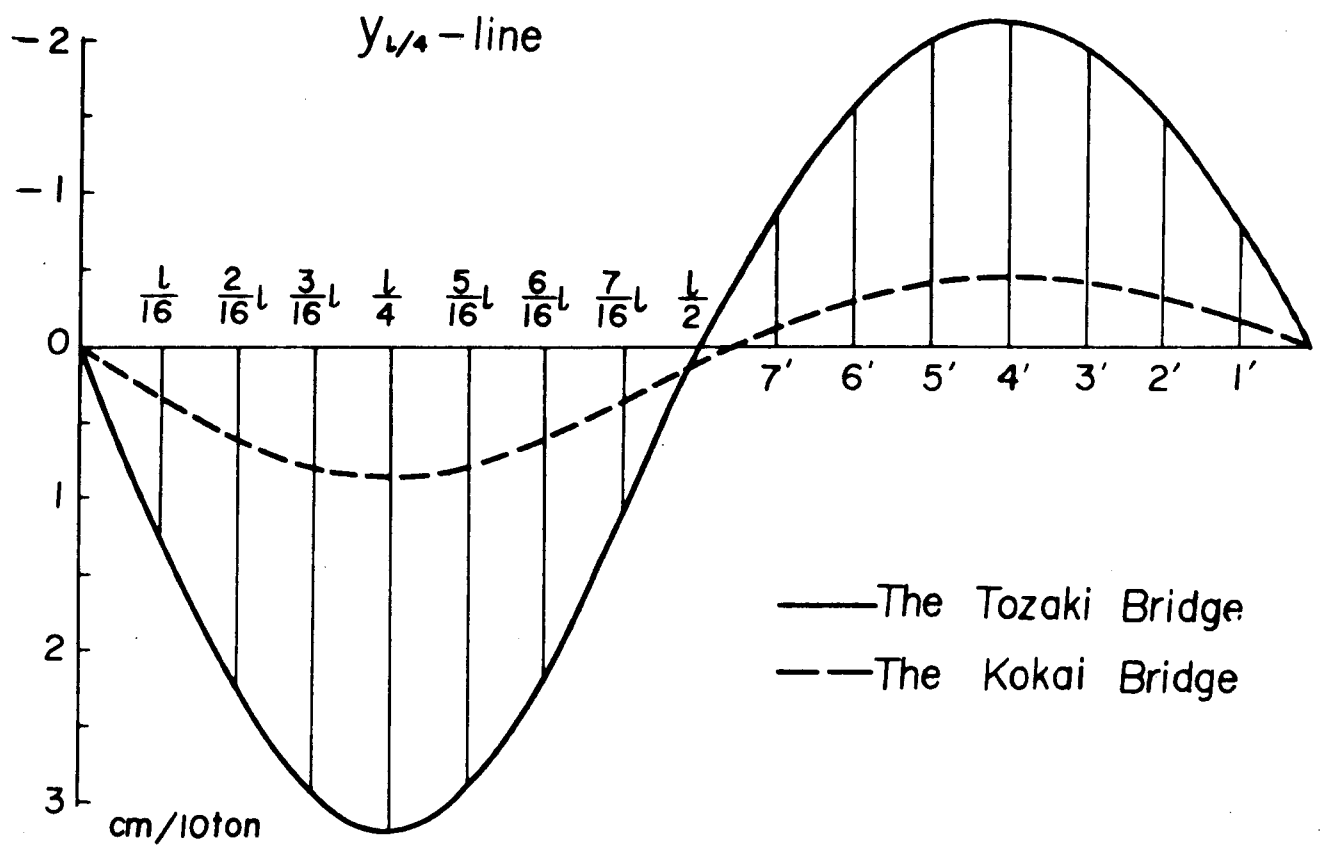
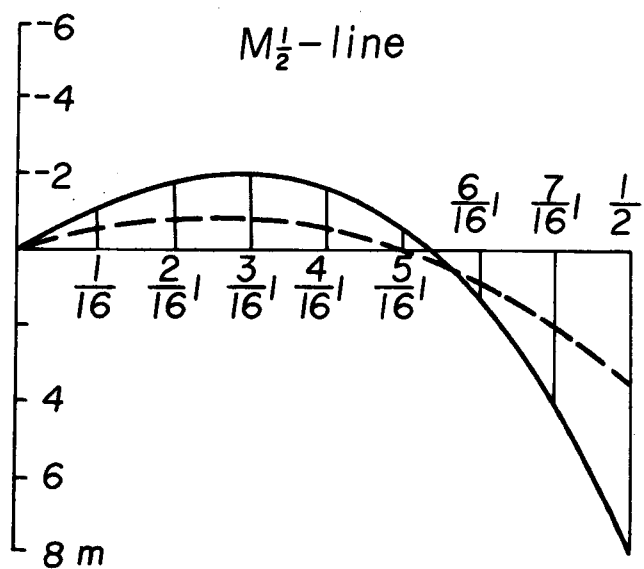
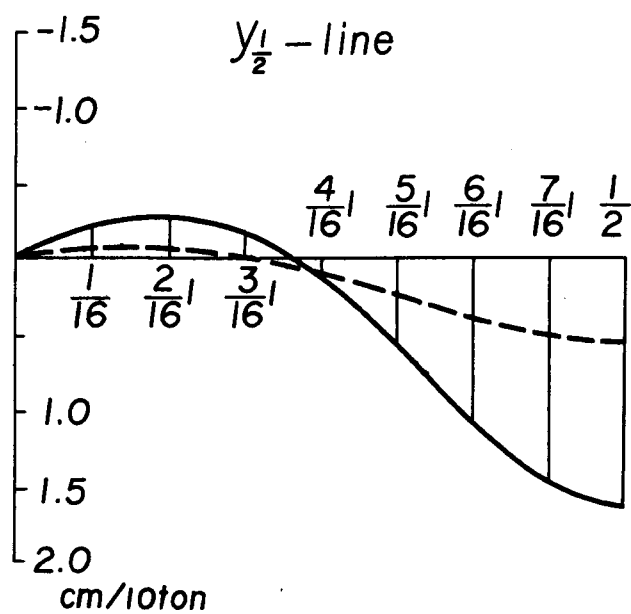


Fig. 3.2.8.3



— The Tozaki Bridge  
 -- The Kokai Bridge

Fig - 3.2.8.4

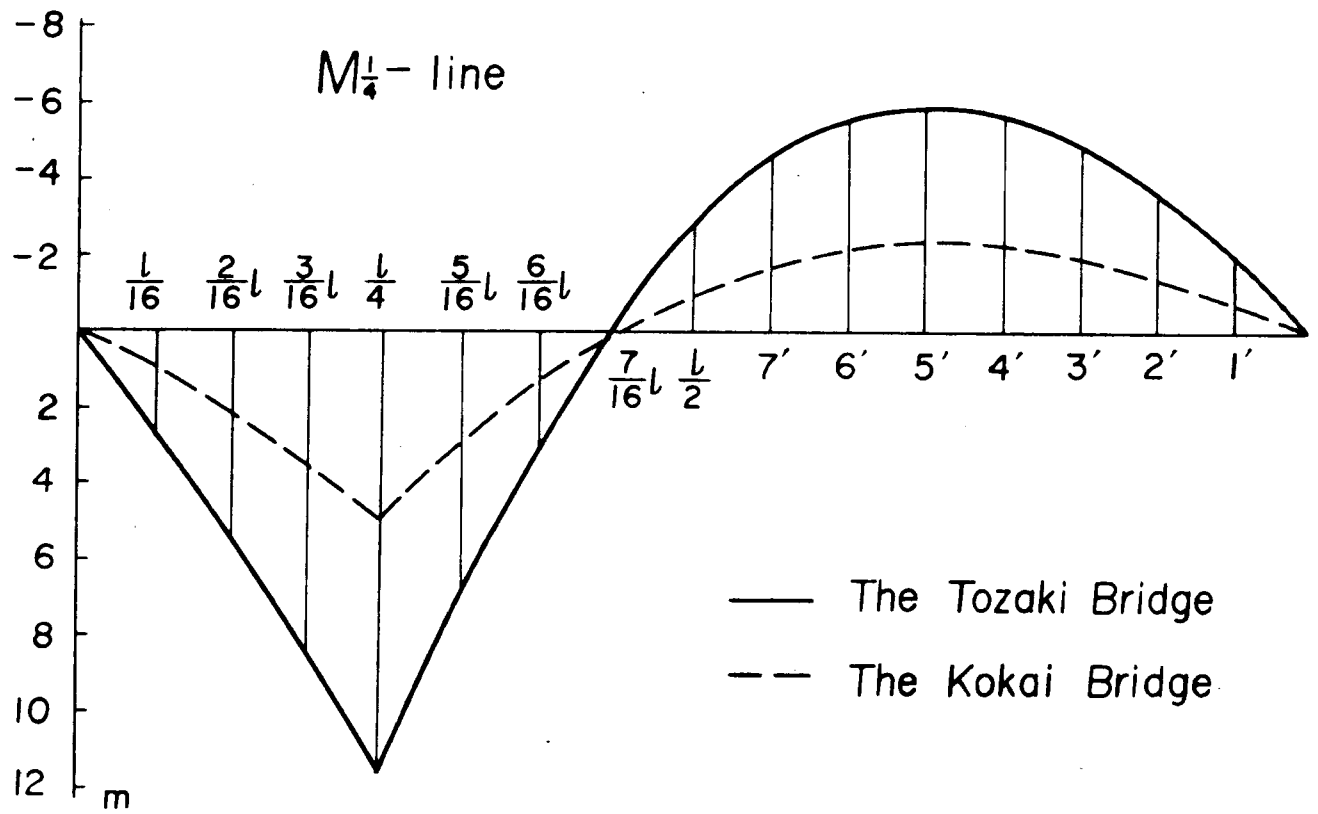


Fig. 3.2.8.5

## (子飼橋) 影響線

荷重点	$y_{1/2}$ - 線 ( $\times 10^{-3}$ cm/t)			$M_{1/2}$ - 線 (cm)		
	動的解析	静力学	比(%)	動的解析	静力学	比(%)
$1/16 \cdot l$	-1.770 (1.694)	-1.849		-36.55 (36.93)	-54.39	
1						
$2/16 \cdot l$	-0.931 (0.924)			-63.70 (64.39)		
$3/16 \cdot l$	4.064 (3.985)	5.600		-73.13 (74.23)	-72.00	
2						
$4/16 \cdot l$	13.462 (13.398)			-57.92 (59.27)		
3		23.547			-23.68	
$5/16 \cdot l$	26.305 (26.300)			-12.31 (13.81)		
$6/16 \cdot l$	40.443 (40.433)			69.18 (66.49)		
4		45.724			111.38	
$7/16 \cdot l$	52.444 (52.255)			186.72 (184.82)		
5					345.69	99.9 (99.3)
$8/16 \cdot l$	57.672 (57.562)	57.672	100.0 (99.8)	349.18 343.21		

注：( ) 内 はエネルギー法

表 - 3.2.8.16



8.6, 図-3.2.8.7 のようになり両者は全く一致することが知られる。この橋の影響線を図にしたものが図-3.2.8.3 ~ 図-3.2.8.5 の破線である。

#### (vi) 荷重が移動する場合の動的レスポンス

移動する荷重としては自動車などのように複雑な振動系よりなる荷重が考えられるが、ここでは簡単のために単一集中荷重が一定速度で移動するものとして計算をすすめた。

動的増加撓み  $\Delta W_d$  は式 (3.2.6.10) より計算することができ、戸崎橋の  $l/4$  点のレスポンスについて、速度  $v_0 = 10 \text{ m/sec}$ ,  $20 \text{ m/sec}$ ,  $30 \text{ m/sec}$  のときの  $\Delta W_d$  を計算した結果と、静的撓み  $W_s$  および  $\Delta W_d + W_s = W$  との3者を図-3.2.8.8 ~ 図-3.2.8.10 に示す。ここで  $\Delta W_d$  の最大値と  $W_s$  の最大値との比をもって動的増加率と定義すると、それぞれの速度に対して動的増加率は 11%, 24%, 43% となる。本橋の設計に際しては衝撃係数  $i = 20/(50 + l') = 11\%$  (ここに  $l' = 120 + (l - 120)/2 = 129.6 \text{ m}$ ) が採用してあった。 $l/4$  点のレスポンスでは逆対称 1 次 ( $m=2$ ) が顕著に現われ、動的増加撓み  $\Delta W_d$  の大部分がこの振動に支配されていることが計算結果より知られる。この計算においては、対称振動に対して  $m=1, 3, 5$ ;  $n=1, 3, 5$  までと

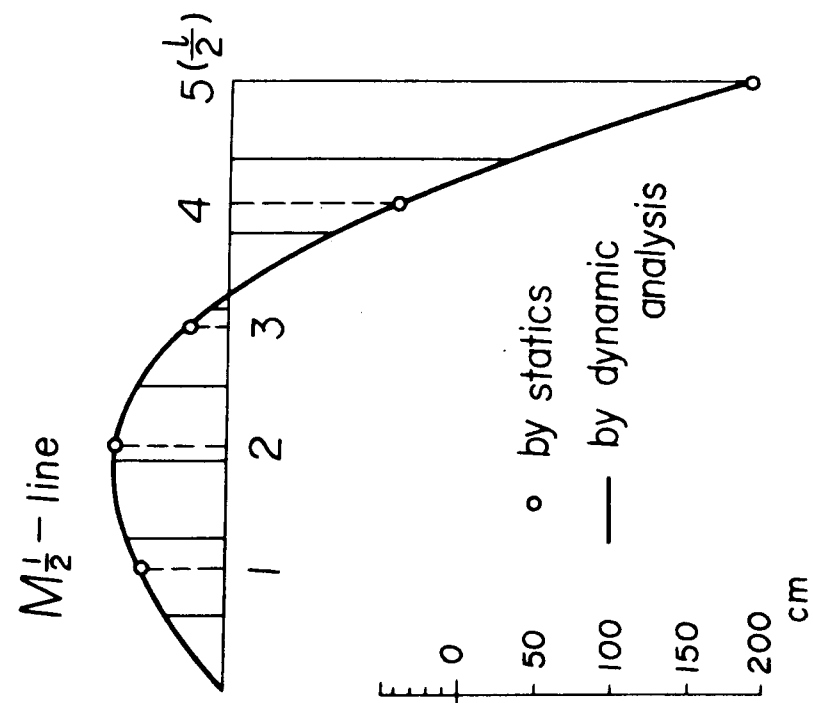


Fig.3.2.8.7

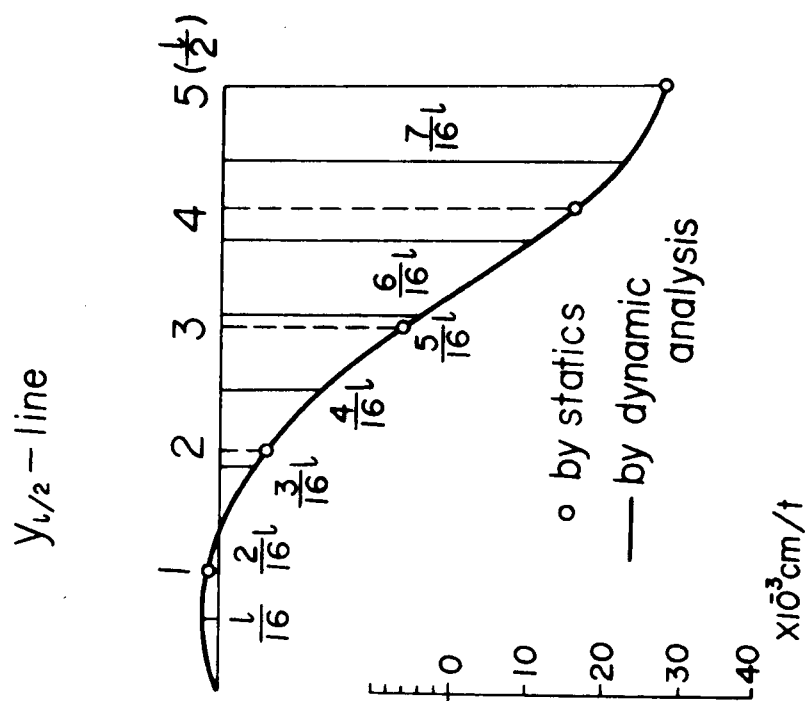


Fig.3.2.8.6

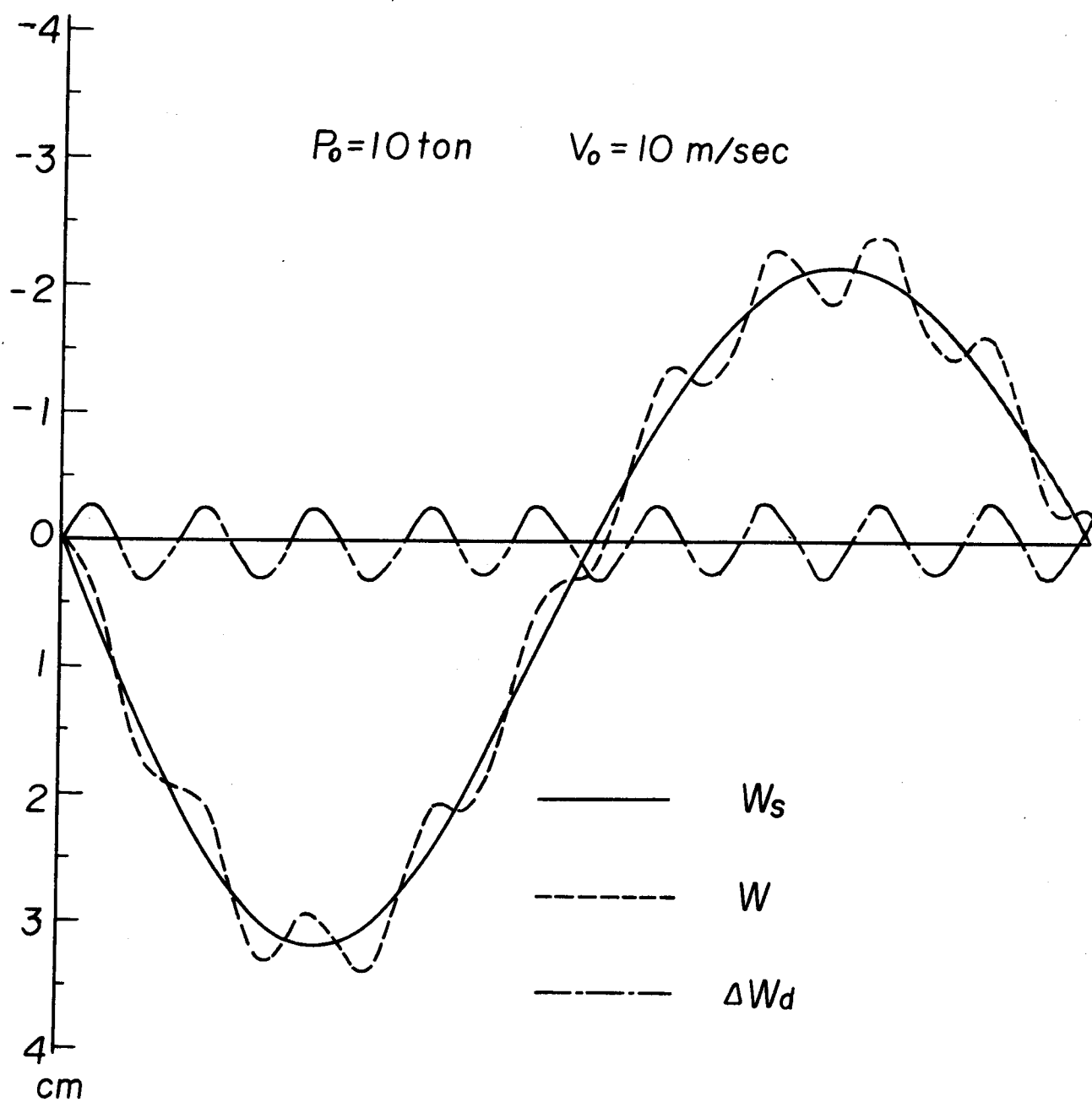


Fig. 3.2.8.8

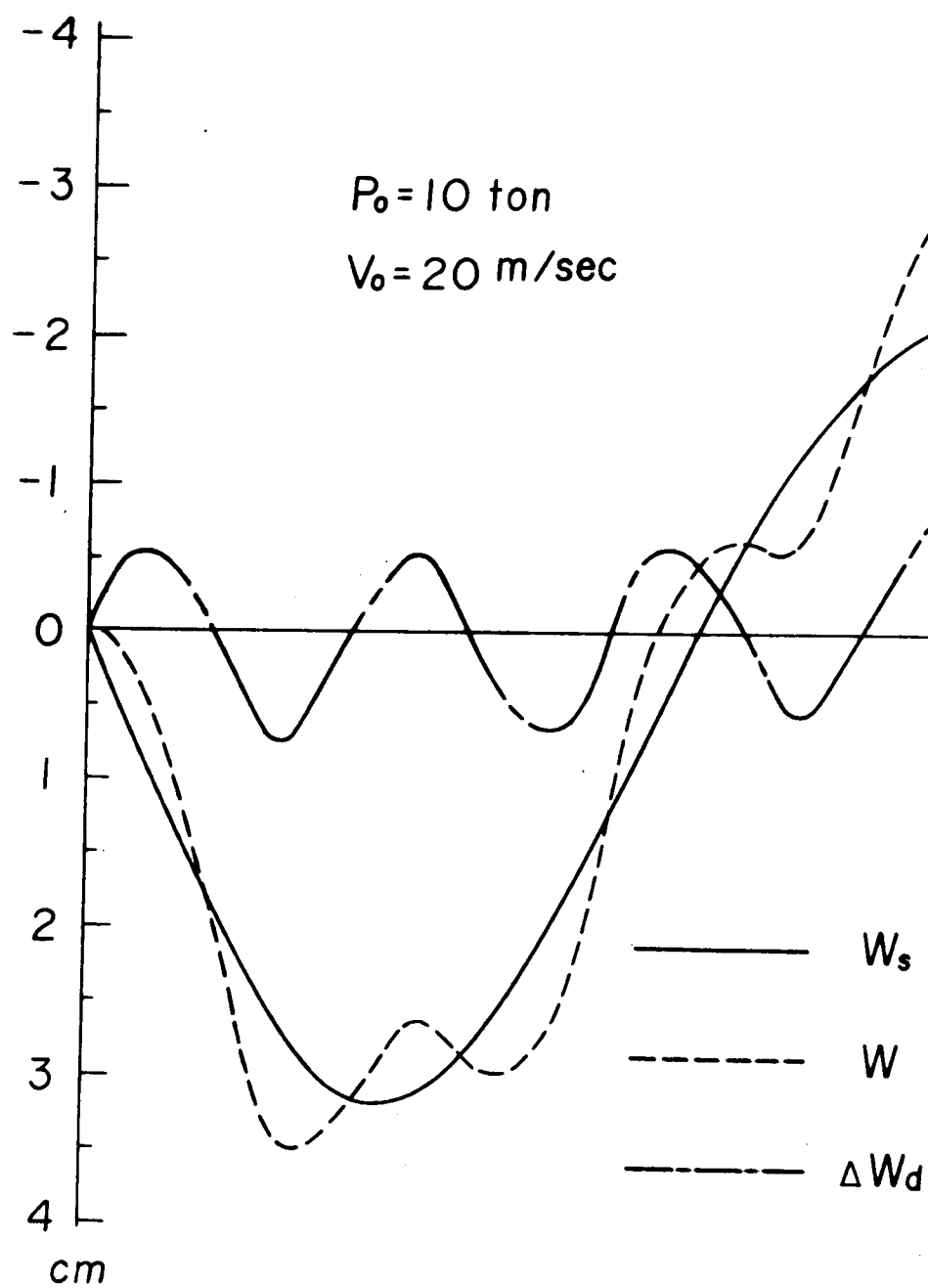


Fig.3.2.8.9

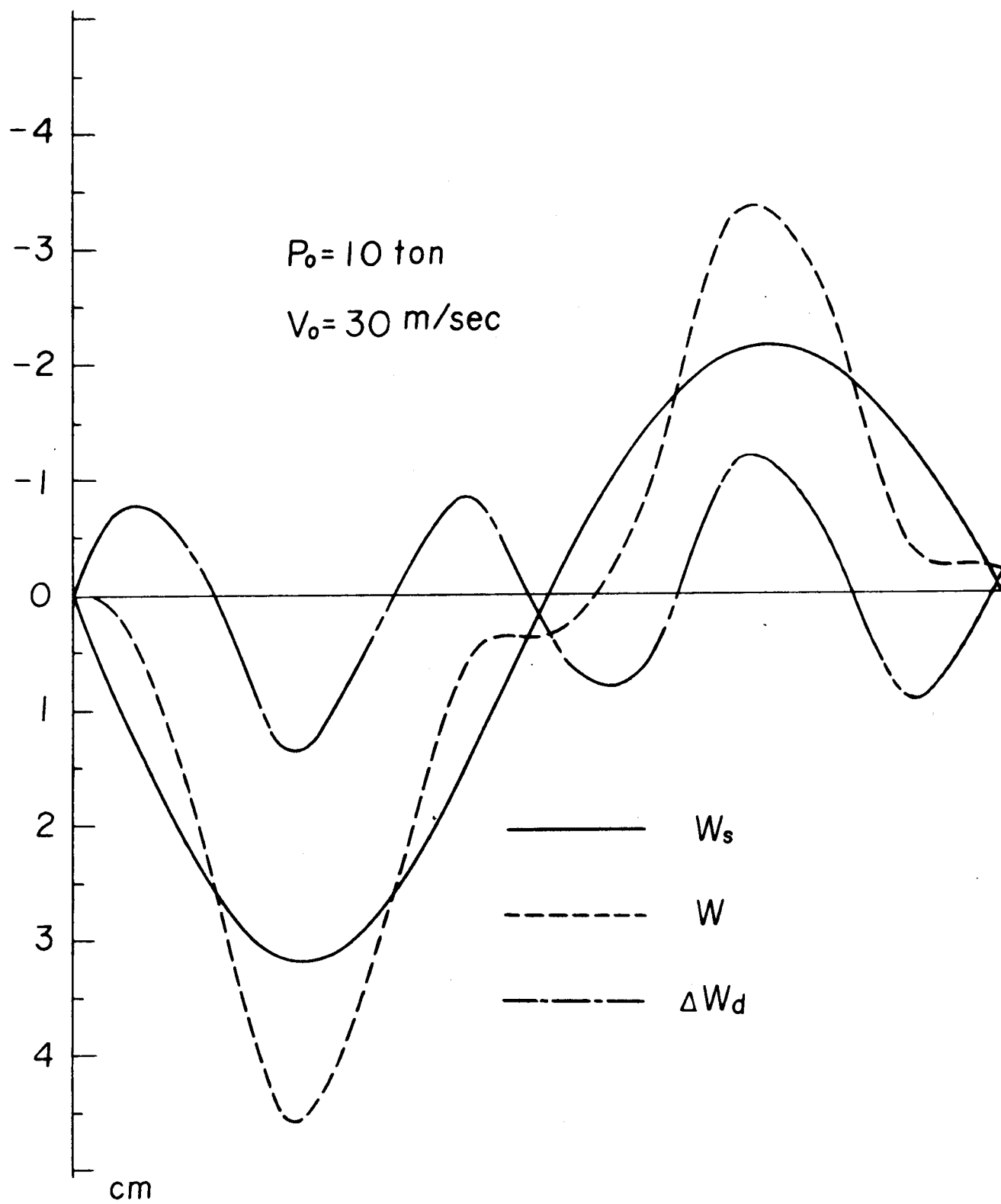


Fig. 3.2.8.10

り、逆対称振動に対しては  $m = 2, 4, 6$  までとった。

### 3.2.9 ローゼ桁・吊橋への適用

単純梁を索で補強した構造物としてランガー桁を取り上げ、これについて動的解析を詳しく述べてきたが、この種の構造物として他にローゼ桁または吊橋が考えられる。これらはいずれもランガー桁と同じ原理にもとづく構造のものである。すなわちローゼ桁はアーチ部に曲げ剛性を持たせてアーチを補強したものであり、吊橋はアーチの形状が、ランガー桁のものと上下反対の放物線形状となっているためにアーチに引張力が作用する構造のものである。これまでこの両者についてはふれなかったがいずれもランガー桁に対してたてた基礎式がそのまま使用できる。はじめにローゼ桁について考える。まずローゼ桁のアーチ部の曲げ剛性  $EI_a$  を取り去りランガー桁と同じ構造のものにして考える。これにある変形

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi x}{l} \quad (3.2.9.1)$$

を与えた場合、アーチと補剛桁との間に作用する力はランガー桁と全く同じであるから、アーチの水平推力  $\Delta H$  はランガー桁の適合条件式式 (3.2.2.9)

$$\Delta H = \frac{16 E f B}{\pi l^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}, \quad (n = 1, 3, 5, \dots) \quad (3.2.9.2)$$

がそのまま使用できる。このようなランガー桁のアーチ部に曲げ剛性  $E I_a$  を持たせるとローゼ桁となるが、ローゼ桁が式 (3.2.9.1) の変形を生じている場合、このアーチ部に作用する曲げモーメント  $M_a(x)$  は (図 - 3.2.9.1 参照)

$$M_a(x) = -E I_a \varphi''(x) \cdot \cos \alpha(x) \quad (3.2.9.3)$$

であり、補剛桁に作用する曲げモーメント  $M_g(x)$  は

$$M_g(x) = -E I_g \varphi''(x) \quad (3.2.9.4)$$

であるはずである。いま吊材の伸びの影響は無視しているからアーチ部 (上弦材) と補剛桁 (下弦材) とは同一変形をしていると考えてよい。  $M_a(x)$  と  $M_g(x)$  との和を作ると

$$M(x) = M_a(x) + M_g(x) = -E \{ I_a \cos \alpha + I_g \} \varphi''(x) \quad (3.2.9.5)$$

実在橋の場合  $\cos \alpha$  の値はほぼ 1 に近く

$$I_a \cos \alpha \doteq I_{ac} \quad (3.2.9.6)$$

( $I_{ac}$  : クラウンにおける断面 2 次モーメント)

と仮定してもその誤差は約 10~15% 程度であるので、このような近似を行うと式 (3.2.9.5) は

$$M(x) = -E (I_{ac} + I_g) \varphi''(x) \quad (3.2.9.7)$$

となる。すなわち、上弦材の曲げ剛性  $E I_a$  を補剛桁の曲げ剛性にくり入れて、補剛桁が見掛け上  $E (I_{ac} + I_g)$  なる曲

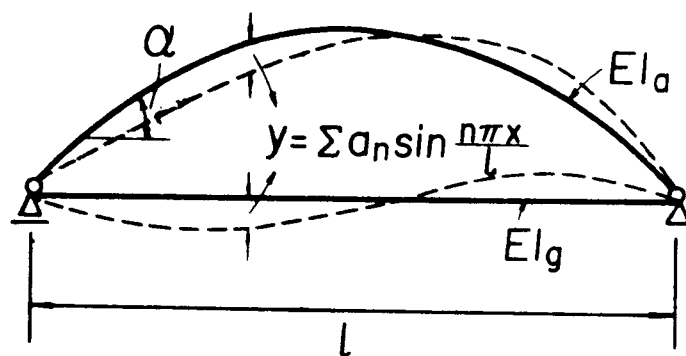


Fig. 3.2.9.1



が剛性を持ったものとして前節までのランガー桁の解析を行えばよいことがわかる。

奉平橋（ローゼ桁・スパン  $l = 78.40\text{m}$ ）の  $3l/10$  点の曲げモーメント影響係数を上記の動的解析法より求めて、これを図-3.2.9.2, 図-3.2.9.3 に示した。この解析法の計算精度も検討できるよう静力学的に求めた設計計算値も図に書き入れた。これらの図より本解析法の精度のよいことが知られる。撓み曲線は固有振動数と振動モードをもとにして計算するが（式（3.2.5.1）参照）、曲げモーメントを求めるには式（3.2.4.7）に示すように撓み曲線を2回微分する必要がある。従って、振動モードと固有振動数の僅かの誤差が、曲げモーメントには大きな誤差となってあらわれることになる。このような意味で、曲げモーメントが図-3.2.9.2, 図-3.2.9.3 に示す程度の精度で求められているときには、固有振動数と振動モードはかなり正確に計算されているものと判断してよい。

吊橋に対しても変形等置法はそのまま適用できる。もつとも吊橋は鉛直振動の他に水平振動・揺れ振動についても考慮しなければならぬが、ここでは鉛直振動のみについて考えることにする。吊橋とランガー桁とは構造上緊密な相関関係があるので、こ

## The Taihei Bridge

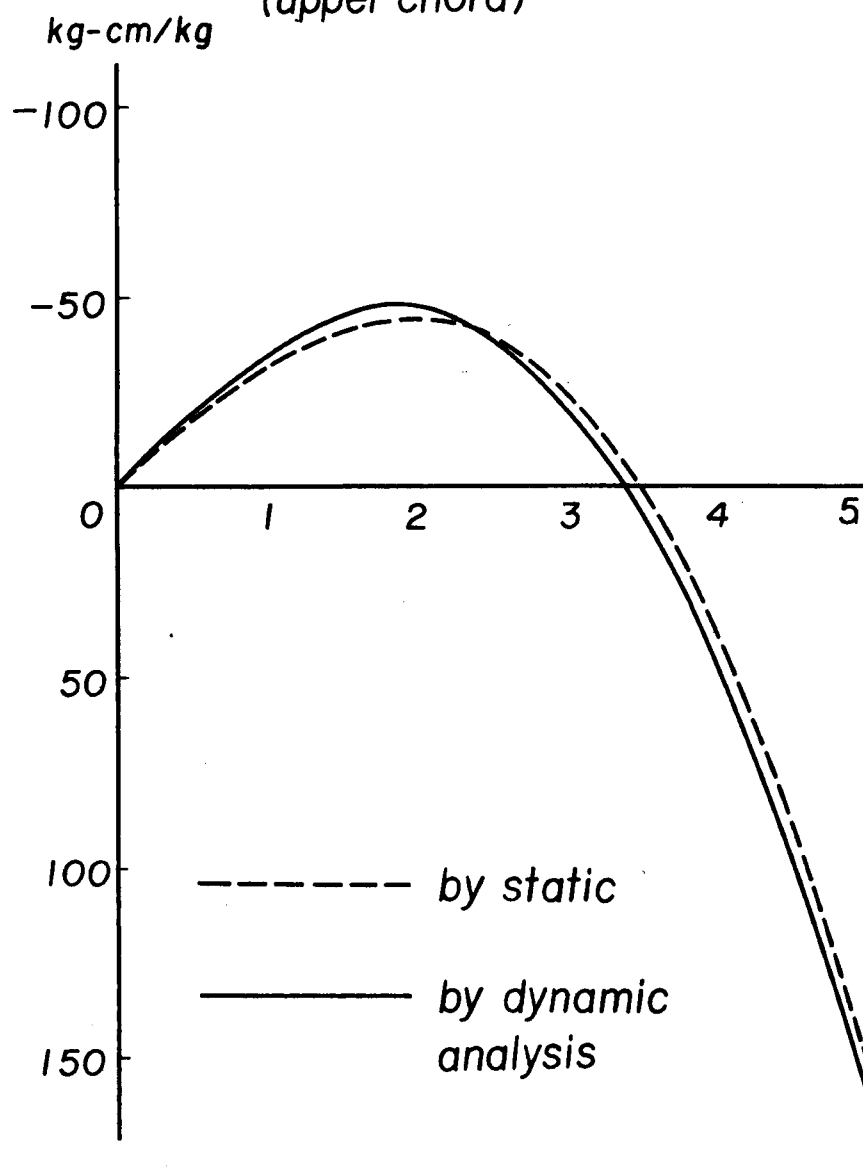
 $M_{1/2}$  - line  
(upper chord)

Fig. 3.2.9.2

$M_{3L/10}$  line  
(lower chord)

126-2

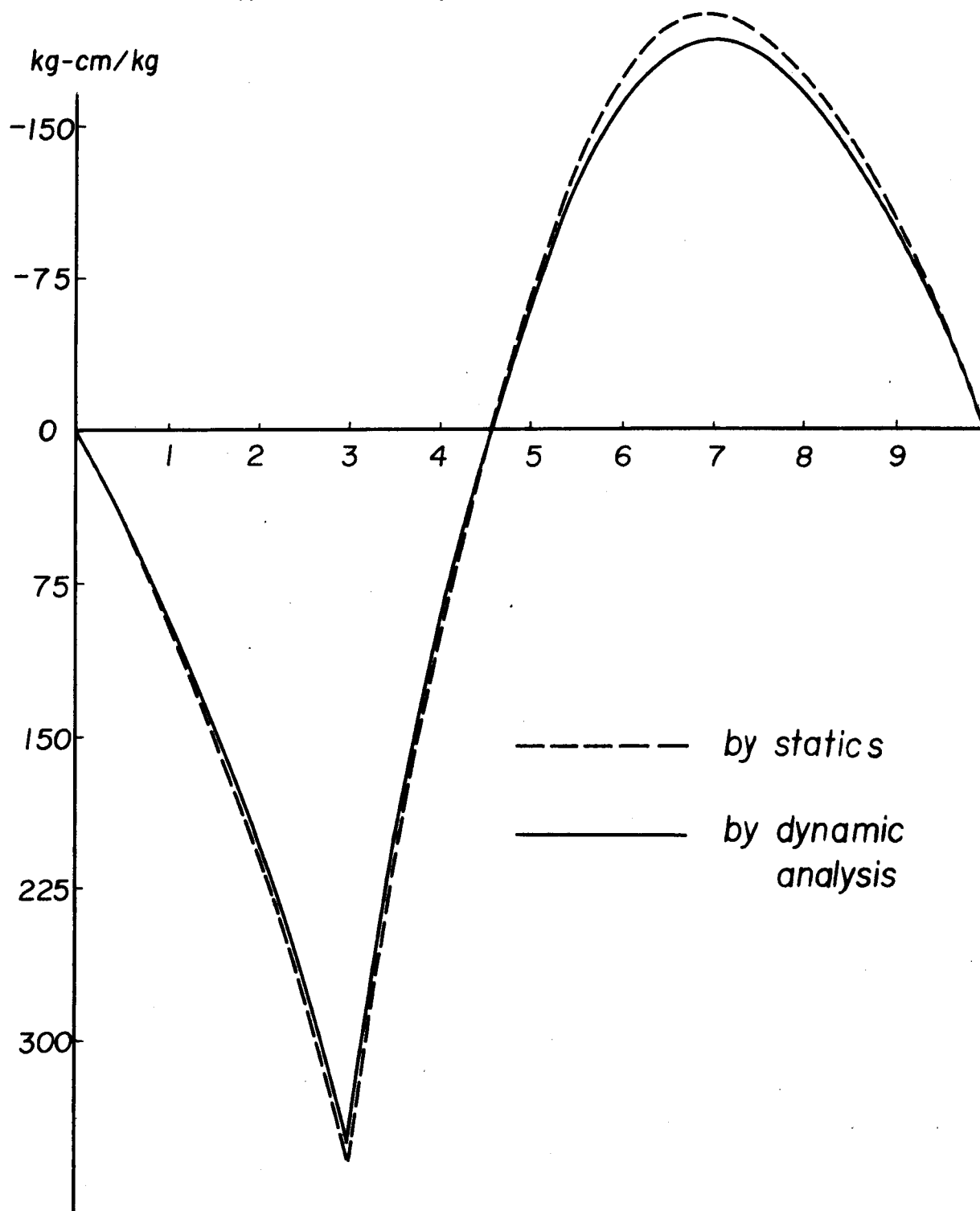


Fig. 3.2.9.3

ここではこれらの関係をもとにして、ランガー桁についてたてた基礎式を吊橋に適用することを考えよう。

ランガー桁はアーチ部を補剛桁によって弾性支持されているが、吊橋ではアーチ部の両端を背控ケーブルによって弾性支持されている。またアーチ部に  $\Delta H$  なる水平軸力が生じたときランガー桁では補剛桁に  $\Delta H$  の軸力が作用するけれども、吊橋では背控ケーブル部に  $\Delta H \sec \phi_1$ 、または  $\Delta H \sec \phi_2$  なる軸力が作用する(図-3.2.9.4)。これら両者の相互関係を表-3.2.9.1に示した。

表-3.2.9.1

	ランガー桁	吊橋
アーチ支持部	補剛桁	背控ケーブル
アーチ支持部の与える力	$\Delta H$	または $\Delta H \sec \phi_1$ $\Delta H \sec \phi_2$
アーチ支持部の水平伸び	$\Delta l = \frac{\Delta H \cdot l}{A_g E_g}$	$\Delta l_s = \frac{\Delta H}{E_a A_a} \{l_1 \sec^3 \phi_1 + l_2 \sec^3 \phi_2\}$

ここに  $E_a$  : アーチ(索)の弾性係数

$A_a$  : アーチ(索)の断面積

$E_g$  : 補剛桁の弾性係数

$A_g$  : 補剛桁の断面積

このように吊橋とランガー桁はともにアーチ部両端を弾性支持

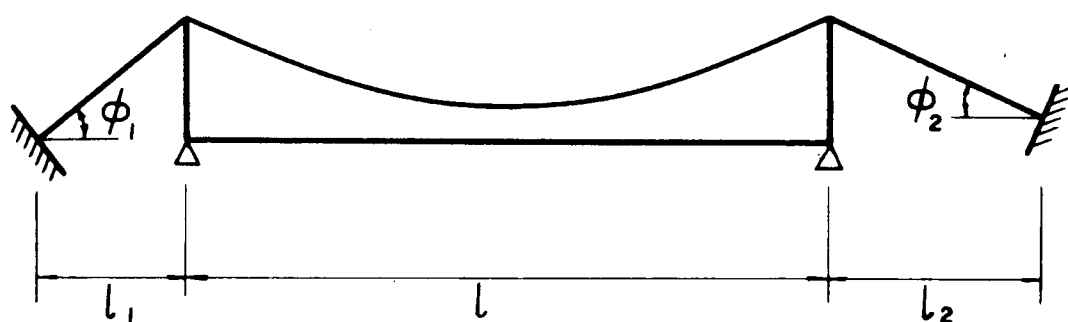


Fig. 3.2.9.4

するという共通点を持ち、しかもその対応関係が上表のように与えられるので、ランガー桁の解析過程を使用すれば吊橋の基礎式は容易に誘導できる。それには式(3.2.2.4)にて示されるランガー桁の補剛桁の伸び $\Delta l$ (表-3.2.9.1)の代りに背控ケーブルの水平伸び $\Delta l_s$ (表-3.2.9.1)を使用して式(3.2.2.9)に対応する吊橋の適合条件式を導き、これをもととして固有振動数・振動モードなどを求める基礎式を誘導すればよい。しかしこのようにして吊橋の基礎式をあらためて立てると、ランガー桁について求めた基礎式をすべて書きかえる必要が生じるので、ここではランガー桁の基礎式がそのまま吊橋に使用できるように補剛桁断面積 $A_g$ を適当に換算し背控ケーブルと置きかえることについて考えてみる。

アーチ部に $\Delta H$ の水平軸力が作用するとき、アーチ支持部の水平伸び $\Delta l$ 、 $\Delta l_s$ はそれぞれ表-3.2.9.1のように与えられるので、これらを使用して式(3.2.2.5)の適合条件式を積分して示せば次式となる。

$$16 \frac{f}{l\pi} \sum_n \frac{Q_n}{n} - \frac{\Delta H \cdot l}{A_a E_g} \cdot \left\{ 1 + 8 \left( \frac{f}{l} \right)^2 + 19.2 \left( \frac{f}{l} \right)^4 \right\} = \frac{\Delta H \cdot l}{E_g A_g}$$

$$16 \frac{f}{l\pi} \sum_n \frac{Q_n}{n} - \frac{\Delta H \cdot l}{A_a E_a} \left\{ 1 + 8 \left( \frac{f}{l} \right)^2 + 19.2 \left( \frac{f}{l} \right)^4 \right\} = \frac{\Delta H}{E_a A_a} \{ l_1 \sec^3 \phi_1 + l_2 \sec^3 \phi_2 \}$$

これらの式を比較して、補剛桁断面積  $A_g$  を式 (3.2.9.8) のようにあらわせばランガー桁の適合条件式が吊橋の適合条件式に変換できる。

$$A_g' = \frac{E_a}{E_g} \cdot l \cdot \frac{A_a}{l \left\{ 1 + 8 \left( \frac{f}{l} \right)^2 + 19.2 \left( \frac{f}{l} \right)^4 \right\} \left\{ 1 - \frac{E_a}{E_g} \right\} + (l_1 \sec^3 \phi_1 + l_2 \sec^3 \phi_2)} \quad (3.2.9.8)$$

これより吊橋の解析を行うには、その背控ケーブルと等価に取扱うことのできる補剛桁断面積  $A_g'$  を式 (3.2.9.8) により決定してこれまで述べたランガー桁の動的解析法をそのまま適用すればよいことが知られる。

撓度理論によれば死荷重による索の軸力  $H_0$  を考慮するが、この影響は変形等置法では以下の手法で取り入れる。いま吊材の伸びは無視しているから索と補剛桁とは全く同じ変形をする。従って索に生じている  $H_0$  を補剛桁に移行して考えても力学的に矛盾は生じない。このように  $H_0$  を補剛桁に移して（例えばアーケ（索）は今迄通りの解析が可能で、補剛桁には両端に  $H_0$  なる軸力を作用させたものと考えればよい。

$H_0$  なる引張力を受ける梁の基礎微分方程式は周知のように

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - H_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + p \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (3.2.9.9)$$

により与えられる。単純梁の場合、その固有振動数  $\omega_{gn}'$  および振動モード  $\bar{\Phi}_{gn}(x)$  は次式により示される。

$$\omega_{gn}' = \omega_n \left\{ 1 + \frac{\gamma}{n^2} \right\}^{1/2} \quad (3.2.9.10)$$

$$\bar{\Phi}_{gn}(x) = \sqrt{\frac{2}{\rho l}} \sin \frac{n\pi x}{l} \quad (3.2.9.11)$$

ここに  $\gamma = \frac{H_0 l^2}{EI \pi^2}$

また  $\omega_n$  は式 (3.2.3.11) により与えられる  $H_0 = 0$  なるときの単純梁の固有振動数である。

すなわち、単純梁が軸力の作用を受けると  $H_0 = 0$  の場合と比較して固有振動数  $\omega_{gn}'$  は増加するけれども、振動モード自体に変化は生じない。従って変形等置法により吊橋を補剛桁部と索部とに分割するとき、この補剛桁の固有振動数が軸力を無視した場合と比較して見掛け上  $\{1 + \gamma/n^2\}^{1/2}$  倍増加したものと考えれば、これまでに述べた吊橋（ランガー桁）の解析法がそのまま適用できることがわかる。すなわち、振動数方程式 (3.2.3.7) は

$$1 + \frac{512 E f^2 B}{\pi^2 \rho l^4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 (\omega_{gn}'^2 - \omega^2)} = 0 \quad (3.2.9.12)$$

$$B = \frac{A_a A_g'}{A_a + A_g' \left\{ 1 + 8 \left( \frac{f}{l} \right)^2 + 19.2 \left( \frac{f}{l} \right)^4 \right\}}$$



( $A'_g$  は式 (3.2.9.8) より決定する)

により与えられ<sup>\*</sup>, 振動モード  $\varphi_m(x)$  は式 (3.2.3.8) により

$$\varphi_m(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi(\omega'_{gn}{}^2 - \omega'_m{}^2)} \sin \frac{n\pi x}{l} \quad (3.2.9.13)$$

となる。ここに  $\omega'_m$  は振動数方程式 (3.2.9.12) を解いて得られる吊橋の  $m$  次の固有振動数である。

逆対称振動時には、軸力が零の場合と同様アーチは全く作用せず補剛桁のみの自由振動となるから、固有振動数と振動モードは式 (3.2.9.10), (3.2.9.11) によりそれぞれ与えられる。

上述のように撓度理論による場合であっても、変形等置法はたんに補剛桁の固有振動数を若干補正するだけでこれまでの解析理論がそのまま使用できる。

### 3.2.10 結 語

3.2 においては梁をアーチ(索)で補強した構造物を変形等置法により解析できることを示した。この種の構造物としてはランガー桁・ローゼ桁・吊橋等が考えられるが、これらは何れも共通した構造のものであるので、ここではランガー桁を代表例として取り上げ、この基礎式を変形等置法により誘導し、これをもととしてローゼ桁・吊橋の基礎式が容易に誘導できることを

\* この式は Steinman の基礎式<sup>3)</sup>と一致する。

示した。またランガー桁についてたてた基礎理論により宇崎橋 ( $l=139.2\text{ m}$ ) と子飼橋 ( $l=57.2\text{ m}$ ) の数値計算を行ない、種々の方向から検討し変形等置法の理論の正しいことを確かめたが以下各項目について検討してみたい。

### (i) 仮定

ランガー桁の動的解析を行うにあたって解析容易なようにはじめに 3.2.1 において5つの仮定を設けたが、この仮定のもとづく誤差は撓み・曲げモーメントとも2%程度にすぎないことを静力学的に確かめた(表-3.2.8.3～表-3.2.8.5)。この簡単化した仮定の上に立ってランガー桁の動的理論が發展したわけであるが、振動状態では静的な荷重載荷の状態では考える必要のない変形を生じることと予想されるため、静的な状態の検討より振動時の仮定を批判するのは危険ではあるが、ランガー桁の場合実測値と理論値との関係は一応妥当なものと考えてよいから、ここに設けた仮定は振動時においても使用できると判断される。

### (ii) 適合条件式

ここに用いる適合条件は、静力学的方法すなわち仮想仕事法でランガー桁を解く場合には用いない条件である。この条件も

使って立てた動的理論による解が静力学的解と全く一致するのであるから、この適合条件式の正しいことも立証されたと思う。また、式(3.2.2.9)の適合条件式に示すように、アーチは対称変形のみに対し作用し、逆対称変形時には全く作用せずこの時補剛桁のみの振動となるので、固有振動数と振動モードともこの対称・逆対称の2つのグループに分けて別々に求めることができるので、解析および数値計算は非常に簡単化された。

この適合条件式はローゼ桁・吊橋に対してもそのように使用できる。ランガー桁の場合補剛桁とアーチとの間で適合条件式が使用されるが、吊橋では、アーチ(索)と背控ケーブルとの間で適合条件式が使用される。従ってランガー桁の補剛桁と背控ケーブルとの剛性を適当に換算すれば、ランガー桁の解析が吊橋に適用できるわけである。この両者の換算は式(3.2.9.8)により与えられる。

### (iii) 振動数方程式と振動モード

3.2.3において変形等置法によりランガー桁の振動数方程式と振動モードが決定できることを述べた。従来この種の構造の固有振動数と振動モードを求めるには *Ritz* のエネルギー

法によるのが通例であり、変形等置法のように補剛桁とアーチとの間における変形条件と荷重の釣合条件をもととして、直接その基礎式を誘導する方法は今迄見当らないようである。工学的分野においてはその実用上の簡便さがとくに重視されるので、ここで従来とられてきたエネルギー法と比較検討を行なってみたいと思う。ランガー桁の動的解析を行うにさいして、たまたま変形等置法と時を同じくしてエネルギー法による解析が行われたので、3.2.8の数値計算においてこのエネルギー法による値も併記したわけであるが、変形等置法の解析理論が従来方式と全く異なっているために、このエネルギー法による研究はこの理論の正しいことを証明しかつ数値計算の誤りの訂正することなどに大きく貢献し、貴重な参考資料となったものである。

エネルギー法では、最初に振動モードを仮定し、これを式(1.1.2.4)に示す級数

$$\varphi_m(x) = a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x) + \cdots + a_g f_g(x) \quad (3.2.10.1)$$

によりあらわすが、ランガー桁の場合単純梁の境界条件を満足すればよいから、 $f_n(x)$ , ( $n=1, 2, \cdots, g$ ) には正弦波関数  $\sin(n\pi x/l)$  を選べばよいことは容易に想像できる。

このように振動モードを仮定すると振動数方程式の行列次数はこの級数の項数(今の場合 $q$ 値)によって決定されるが、項数を大きくとれば数値計算に要する労力は加速度的に増加する。振動モードは、振動数方程式より求めた固有値 $\omega_m$ , ( $m = 1, 2, \dots, q$ )を式(1.1.2.6)により示される $q$ 元の同次連立方程式に代入しこれより $\alpha_n$ の比を決定するから、この同次連立方程式を $q$ 回解く必要がある。これを変形等置法による解析と比較してみよう。

振動数方程式は式(3.2.3.7)

$$1 + \frac{5/2 E f^2 B}{\pi^2 \rho l^4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 (\omega_{gn}^2 - \omega^2)} = 0 \quad (3.2.10.2)$$

により与えられ、振動モード $\varphi_m(x)$ は式(3.2.3.8)

$$\varphi_m(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n (\omega_{gn}^2 - \omega_m^2)} \sin \frac{n\pi x}{l} \quad (3.2.10.3)$$

によりあらわされる。式(3.2.10.2)と式(3.2.10.3)は式の形としては無限級数により与えられているが、 $\omega_{gn}^2$ は $n^4$ に比例して増加するものであるから(式(3.2.3.3')), この級数は急速に収束し、実用計算では3~5項程度とれば充分の計算精度が期待できる。これらの式は試算法により求めるのが便利であるが(エネルギー法の場合も同じ)、簡単な級数和であるから行列の

数値計算よりもはるかに簡単に求められることは容易に理解できよう。また振動モードは式(3.2.10.2)より求めた固有振動数 $\omega_m$ の値を使用して式(3.2.10.3)によれば、式(3.2.10.1)の $Q_n$ の係数が直ちに得られる。つまり式(3.2.10.3)の $\sin$ の係数 $\{1/(\omega_{gn}^2 - \omega_m^2)\}$ は振動モードを $\sin$ のフーリエ級数に展開したときのその係数を直接与えるものであり、これはまたエネルギー法の $Q_n$ の値を決定したことになる。上述のことはまた以下のようにも表現できる。

すなわち、ランガー桁のように梁をアーチで補強した構造物に対して変形等置法は、エネルギー法の場合必要となる行列と同次連立方程式の計算は全く不用であり、振動数方程式と振動モードは級数和として直接与えられる。

もっともこの変形等置法は1.2.2に述べたように、結合点に作用させる外力数が1より大きい構造物の固有振動数と振動モードを求めるときにはその外力数に応じた次数の行列と同次連立方程式の計算を必要とするようになる。この点、ここに述べた梁とアーチ(又は索)よりなる構造物では、結合点に作用させた外力は等分布荷重のみであったから、この種の構造物は変形等置法のすぐれた点が發揮できる対象物であると云える。

数値計算によれば、実在橋の固有振動数と振動モードは変形等置法によってもエネルギー法によっても殆んど変わらない結果が得られた。ただし、変形等置法では  $n=1, 3, 5, 7, 9$ ; エネルギー法では  $n=1, 3, 5$  までとった。すなわちエネルギー法による場合、式(3.2.10.1)の級数は  $n=1, 3, 5$  までとれば実用上差支えない精度のものが得られることになる。これは表-3.2.8.6に示す計算例を見れば容易に理解できる。この計算では  $65.5849 / 5n^2 = \eta_n$  欄の  $n=1 \sim 7$  の和が  $-1$  になるように  $\omega_5$  を決定するが、ここでは各  $n$  に対する  $\eta_n$  値の大きさが固有振動数の決定に及ぼす影響の割合を示すものと考えてよい。この計算例では、 $n=5$  が約 96%、 $n=7$  が約 0.07% の重要性を占めている。これより  $\omega_5$  の決定にさいして  $n=7$  の成分が与える影響はきわめて僅かであり、エネルギー法によっても精度のよい値が得られるわけである。従って、高次の成分が無視できないような種類の構造物に対して低次の成分 ( $n=1, 3, 5$ ) のみをもって計算すれば当然異なった結果が得られよう。

またこの計算例から変形等置法によって求めた固有振動数がどの程度の精度を持つものであるかは、 $\eta_n$  値の収束性をみて容易に検討することができる。このことは振動モードについて可能

で、これは表-3.2.8.8の $b_{sn}$ の値と比較すればよい。

3.2.7において、アーチを補剛桁端部で偏心結合したランガー桁の固有振動数 $\omega_m$ と振動モード $\varphi_m(x)$ が変形等置法により求められることを示した。この $\omega_m$ と $\varphi_m(x)$ とはそれぞれ式(3.2.7.19), (3.2.7.20)より決定されるが、もちろんこの場合においても偏心を無視した場合について述べた変形等置法の長所がそのまま發揮される。この偏心の影響は通常のランガー桁の場合より大きな影響を与えないことを静力学的に検討したけれども、ランガートラスの中にはラガスに比べて桁高がかなり大きいものもあり、これらについてはこの偏心の影響は無視できないようである。

固有周期の理論値と実測値との比は約70%である。静的載荷試験による撓み比は大体80%であったから、撓み $w$ は $\omega_m^2$ に逆比例する(式(3.2.5.1), 式(3.2.5.3))ので上の比率は妥当な値であることが知られる。これらのことは理論的に取り扱う構造は実橋よりもそれだけ剛性が小さいということを物語っている。その原因としては縦桁などの主構への協力が考えられる。

#### (iv) 動的レスポンスと静的レスポンス

3.2.4において固有振動数 $\omega_m$ と振動モード $\varphi_m(x)$ をもととし



て種々の荷重が作用するときの運動方程式を誘導し、また動的レスポンスの特別な場合として静的集中荷重が作用するときの撓み・曲げモーメントを求めた(3.2.5)。このように静荷重を周期荷重の特別な場合として取り扱い、その結果を静力学的解析法(ここでは仮想仕事法)による結果と比較したのは、変形等置法の理論の正しいことを確認し、またこの理論によって得られた固有振動数と振動モードの計算精度を検討したためである。従来の動的解析では固有振動数の解析法の理論が主であり、これによる理論値と実測値との比較を行なったものが多かったようである。実在橋は理論で扱う仮定よりも剛にできしており、例えば静的試験を行なっても実測値と理論値との撓み比は70~90%程度であることが多いので、このように理論値と実測値との比較より理論値を検討することは解析理論の前提となる仮定以外の要素を含むことになり理論の証明が困難な場合も生じよう。このようなわけで、ここでは理論の正しいことを示すために、同じ仮定のもとに解いた静的解析と動的解析との結果を比較する方針をとったわけであるが、このように理論値同士を比較することは理論の証明に有効な手段となり得ることもある。この実

例を 3.2.9 に述べた泰平橋 (ローゼ橋) について述べるに次の通りである。

この橋の固有振動数を実測してみると理論値との間に 30 % 程度の差が生じる。しかしこの動的解析より曲げモーメントの静的レスポンスを求めてみると図-3.2.9.2, 図-3.2.9.3 に示すようにその差は 5 % 程度しか生じない。前にも述べたように曲げモーメントを求めるには撓み曲線 (この計算には  $\omega_m$  と  $\Phi_m(x)$  を使用している) を 2 階微分しているので、 $\omega_m$  はさらによい精度を持っているものと期待してよい。この例では理論の正しいことを実測値との比較より示すのは困難である。

式 (3.2.5.1), (3.2.5.3) からわかるように、撓みの計算には  $\omega_m$ ,  $\Phi_m(x)$  を必要とするが、 $\omega_m$  の計算には適合条件式を使用しているから、静的撓みの検討は、適合条件式・固有振動数・振動モードの 3 者を同時に検討したことになる。また曲げモーメントは撓み曲線の 2 階微分として表わせるから (式 (3.2.4.7)), この意味ではこれらの計算精度を最もきびしく吟味したことになる。3.2.8 に述べた数値計算ではこれらの結果が何れも 0.1 % 程度の誤差範囲内に止まったことより、 $\omega_m$  と  $\Phi_m(x)$  は非常に正確な値であることが立証できた。またランガー桁ではエネ

ルガー法により低次 ( $n=1, 3, 5$ ) のみとて振動解析を行なっても変形等値法と同程度の精算値をうることができた。ローゼ桁・吊橋に対しても同様な結果とならう。

このようなわけでこの理論は動的レスポンスと静的レスポンスとが同時に得られる方法であり、静力学的解析法としても、仮想仕事法にかわる一つの方法と云えると思う。また動力学的解析と静力学的解析とが一つの理論で結ばれたということも非常に興味があると思う。

移動荷重の問題としては、ランガー桁上を単一集中荷重が移動するときのレスポンスを計算した。戸崎橋 ( $l=139.2\text{ m}$ ) の  $l/4$  点の動的たわみは、速度  $10, 20, 30\text{ m/sec}$  に対して動的増加率 (ここでは動的増加撓み  $\Delta w_d$  の最大値と静的撓み  $w_s$  の最大値との比をいう) が、それぞれ  $11\%$ 、 $24\%$ 、 $43\%$  となった。とくに逆対称一次の振動が  $l/4$  点では顕著に現われ動的増加率の大部分がこの振動によってしめられていることは留意すべきである。これは逆対称振動時にはアーチは全く作用せず補剛桁のみの振動となるので、固有振動数が対称振動時と比較して小さくなりその結果大きく発生する原因となるわけである。戸崎橋のようにスパンが大きくなればなる程この傾向は増大するので長大スパンのものに

対してはこの逆対稱の振動防止には充分考慮する必要がある。

ここでは荷重として単一集中荷重を取り上げたが、複雑な振動系が移動する場合についても 2.2.(ii)によれば基礎式は簡単に誘導できる。

#### (V) ローゼ桁・吊橋の解析

ランガー桁の動的解析に示した変形等置法の理論がローゼ桁・吊橋の振動解析にも容易に適用できることを 3.2.9 に示した。もともとこれらの橋は、梁を放物線状のアーチで補強する意味において共通した構造形式のものであるから、この二者が一つの理論によって解析されても当然のことではあるが、これまでこれらの間に関連を持たせることなく別途に取り扱ってきたのが趨勢であり、ここに示したように一つの理論によって共通的に解析することを試みた研究は筆者の知る限りでは見当たらないようである。吊橋の振動解析は現在並多数報告されているが、ランガー桁・ローゼ桁の動的研究はあまり行われていないようである。このことを裏返して云えば、これまで行われた吊橋の解析理論のうちにはランガー桁・ローゼ桁に使用できるものもかなりあることになる。

ここで注意しなければならないのは、ランガー桁・吊橋について示した変形等置法の理論は解析過程に近似を含まいものであり、口

ローゼ桁のものは近似手法を用いたものであることである。これは前者に対しては、3.2.1に設けた5つの仮定以外には何ら近似を行なっていないけれども、後者に対してはこの仮定以外にアーチの曲げ剛性  $I_{ac}$  について式(3.2.9.6)に示す近似をしているためである。このようなわけで、動的解析より求めた静的レスポンスと最初より静力学的に求めた値とも比較した場合、ローゼ桁ではランガー桁について示されたような精度でこの二者が一致するのを期待するのは無理であらう。

なお、梁とアーチとの結合にここでは等分布周期力を使用した。これを他の種類の周期力(例えば集中荷重)によろうとしてもそれは不可能である。

### 3.3 梁と弾性(固定)支承とよなる構造物(弾性支承上の連続梁)

#### 3.3.1 緒言

3.3では、変位あるいは回転に対して抵抗を持つ弾性支承上の連続梁の固有振動数と振動モードとを変形等置法により求めることについて述べる<sup>28)</sup>。構造物の固有振動数と振動モードが与えられる限り2.2に述べた基礎式が使用できるので、

ここでは主題の梁の固有振動数と振動モードを求めることを主な目的とする。

ここでいう弾性支承とは、変形に比例した抵抗を生じる支承であり、今後変位または回転に対して抵抗を持つ支承をそれぞれ変位支承または回転支承と呼び、両者ともに抵抗を有するものを変位回転支承と呼ぶことにする。この種の梁は静力学的には多く取り扱われているけれども動学的解析はほとんど行われていないようである。その動学的解析の一つとして振動撓角法(式(2.3.24))の適用が考えられるが、ここでは変形等置法によりその基礎式を導いてみよう。この理論によると連続した一本の梁に各支承を、その支承条件を満足するように順次結合して基礎式を誘導する方法となる。振動撓角法では梁を各スパンごととに切断し、その両端と支承との間で変形の連続条件および力の平衡条件を考えて基礎式を導く必要があるが、変形等置法はたんに連続した一本の梁に支承を結合することのみを考えて基礎式をたてるから考え方が簡明になる他に、変位支承または回転支承を持つものに対して振動数方程式の行列次数を下げることもできる利点も持っている。このことについては3.3.9の結語の所でくわしく述べる。

梁と支承との結合は必ずしも同時に全部行う必要はなく、数値計算の可能な範囲において順次結合を繰り返して解析してゆけばよい。特に支承が多い場合には、はじめに梁全体を適当なブロックに分割し、各ブロックについて上述の解析を逐次行ない、最後にそれら各ブロックの両端を結合してもとの連続梁に組み立てることも可能である。

また、振動撓角法によって求めた振動モードは各スパンごとに異なった式であらわされるが、変形等置法によると全スパンにわたりの式で与えられる。ただし上述のブロックに分割して解析を行うときにはブロックごとに異なった関数となる。従って、走行荷重をうける梁のレスポンスの解析のとき、振動撓角法ではスパンごとに異なった関数・初期条件を使用して数値計算を行う必要が生じるが、変形等置法ではこのような不便が除かれる。なお変形等置法によると振動モードを正規化するさい、その係数がきわめて容易に求められると特にすぐれていると思う。

構造物の種類によってはエネルギー法を適用した方が便利なることもあらうが、固定支承の多い場合または境界条件が複雑な梁の場合など最初に仮定する関数が容易に考え出せない場合もあるので上記の2方法と比べて一般性はあられると思われる。

### 3.3.2 周期力を受ける梁の基礎式

図-3.3.2.1に示すように周期力  $P_0 \sin \omega t$  が  $x_j$  点に作用した時  $x_i$  点の撓みと撓み角は式(2.2.26), (2.2.27)と式(2.2.3), (2.2.16)とを使用して次式に示される。

$$W = \sum_{m=1}^{\infty} \Omega_m \bar{\Phi}_m(x_i) \bar{\Phi}_m(x_j) P_0 \sin \omega t \quad (3.3.2.1)$$

$$\theta = \sum_{m=1}^{\infty} \Omega_m \bar{\Phi}_m'(x_i) \bar{\Phi}_m(x_j) P_0 \sin \omega t \quad (3.3.2.2)$$

$$\Omega_m = 1/(\omega_m^2 - \omega^2)$$

また、モーメント荷重  $M_0 \sin \omega t$  が  $x_j$  点に作用する時(図-3.3.2.2),  $x_i$  点の撓みと撓み角は式(2.2.30), (2.2.31)と式(2.2.3), (2.2.16)とを使用して次のようにあらわされる。

$$W = \sum_{m=1}^{\infty} \Omega_m \bar{\Phi}_m(x_i) \bar{\Phi}_m'(x_j) M_0 \sin \omega t \quad (3.3.2.3)$$

$$\theta = \sum_{m=1}^{\infty} \Omega_m \bar{\Phi}_m'(x_i) \bar{\Phi}_m'(x_j) M_0 \sin \omega t \quad (3.3.2.4)$$

このように強制周期力が作用するとき、その荷重点と測定点の座標が与えられたならば、任意の測定点の撓みと撓み角は決定できるので、図-3.3.2.3, 図-3.3.2.4に示すように凡この強制周期力が作用する時  $x_i$  点のレスポンスは次式により求めることができる。



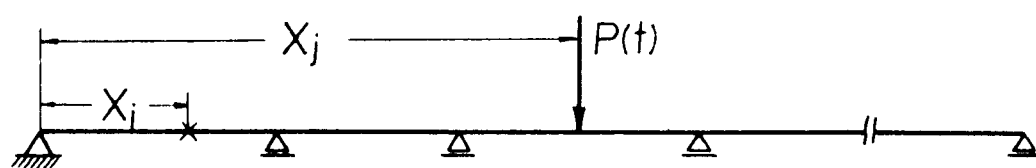


Fig. 3.3.2.1

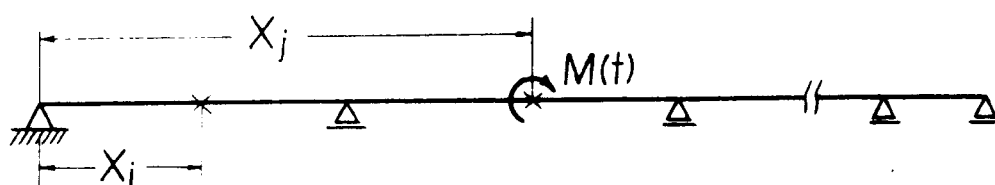


Fig. 3.3.2.2

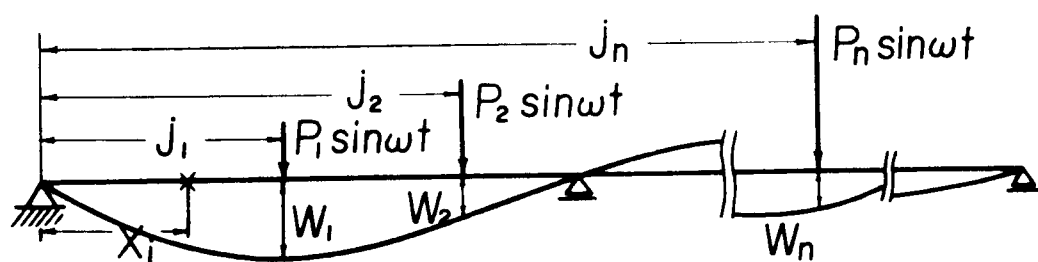


Fig. 3.3.2.3

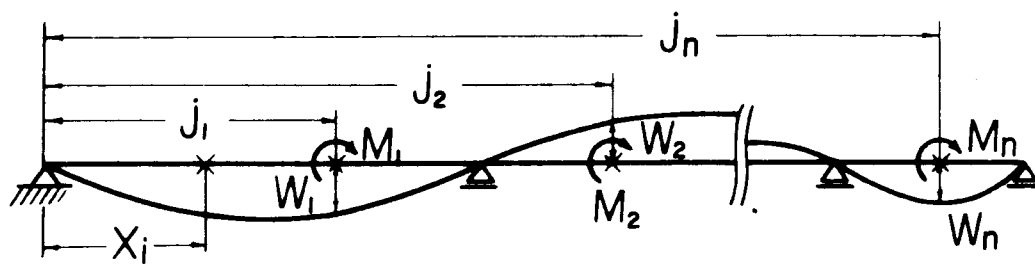


Fig. 3.3.2.4

$$W^P(x_i) = \sum_{m=1}^{\infty} \Omega_m \bar{\Phi}_m(x_i) \{ \bar{\Phi}_m(j_1) P_1 + \bar{\Phi}_m(j_2) P_2 + \cdots \bar{\Phi}_m(j_n) P_n \} \quad (3.3.2.5)$$

$$\theta^P(x_i) = \sum_{m=1}^{\infty} \Omega_m \bar{\Phi}'_m(x_i) \{ \bar{\Phi}_m(j_1) P_1 + \bar{\Phi}_m(j_2) P_2 + \cdots \bar{\Phi}_m(j_n) P_n \} \quad (3.3.2.6)$$

$$W^M(x_i) = \sum_{m=1}^{\infty} \Omega_m \bar{\Phi}_m(x_i) \{ \bar{\Phi}'_m(j_1) M_1 + \bar{\Phi}'_m(j_2) M_2 + \cdots \bar{\Phi}'_m(j_n) M_n \} \quad (3.3.2.7)$$

$$\theta^M(x_i) = \sum_{m=1}^{\infty} \Omega_m \bar{\Phi}'_m(x_i) \{ \bar{\Phi}'_m(j_1) M_1 + \bar{\Phi}'_m(j_2) M_2 + \cdots \bar{\Phi}'_m(j_n) M_n \} \quad (3.3.2.8)$$

$$\text{ここに } \bar{\Phi}_m(j_j) = \bar{\Phi}_m(x=j_j), \quad \Omega_m = 1/(\omega_m^2 - \omega^2)$$

いま考えている周期力は同一位相のものであるから,  $\sin \omega t = 1$  における瞬間のみについて考え式の表現を簡単にした。従つて載荷点における変形は次式のようになる。

$$\begin{pmatrix} W_1^P \\ W_2^P \\ \vdots \\ W_n^P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}^P & a_{12}^P & \cdots & a_{1n}^P \\ a_{21}^P & a_{22}^P & \cdots & a_{2n}^P \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}^P & a_{n2}^P & \cdots & a_{nn}^P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_n \end{pmatrix} \quad (3.3.2.9)$$

$$\text{ここに } a_{ij}^P = \sum_{m=1}^{\infty} \Omega_m \bar{\Phi}_m(x_i) \bar{\Phi}_m(j_j), \quad (i, j = 1, 2, \cdots, n)$$

$$\begin{pmatrix} \theta_1^P \\ \theta_2^P \\ \vdots \\ \theta_n^P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11}^P & b_{12}^P & \cdots & b_{1n}^P \\ b_{21}^P & b_{22}^P & \cdots & b_{2n}^P \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1}^P & b_{n2}^P & \cdots & b_{nn}^P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_n \end{pmatrix} \quad (3.3.2.10)$$

$$\text{2.2.1c} \quad b_{ij}^p = \sum_{m=1}^{\infty} \Omega_m \bar{\Phi}_m'(x_i) \bar{\Phi}_m(j_j), \quad (i, j = 1, 2, \dots, n)$$

$$\begin{pmatrix} W_1^M \\ W_2^M \\ \vdots \\ W_n^M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}^M & a_{12}^M & \cdots & a_{1n}^M \\ a_{21}^M & a_{22}^M & \cdots & a_{2n}^M \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}^M & a_{n2}^M & \cdots & a_{nn}^M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_n \end{pmatrix} \quad (3.3.2.11)$$

$$\text{2.2.1c} \quad a_{ij}^M = \sum_{m=1}^{\infty} \bar{\Phi}_m(x_i) \bar{\Phi}_m'(j_j), \quad (i, j = 1, 2, \dots, n)$$

$$\begin{pmatrix} \theta_1^M \\ \theta_2^M \\ \vdots \\ \theta_n^M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11}^M & b_{12}^M & \cdots & b_{1n}^M \\ b_{21}^M & b_{22}^M & \cdots & b_{2n}^M \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1}^M & b_{n2}^M & \cdots & b_{nn}^M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_n \end{pmatrix} \quad (3.3.2.12)$$

$$\text{2.2.1c} \quad b_{ij}^M = \sum_{m=1}^{\infty} \Omega_m \bar{\Phi}_m'(x_i) \bar{\Phi}_m'(j_j), \quad (i, j = 1, 2, \dots, n)$$

### 3.3.3 連続梁の自由振動

従来、連続梁の固有振動数・振動モードを決定するには、振動撓角法または動的3連モーメント法等が使用されてきたが以下の方法によるのが便利である。<sup>32)</sup>

図-3.3.3.1(a)に示す連続梁について考える。図-3.3.3.1(b)に示すように、まず中間支点を取り去った単純梁を考え、これ

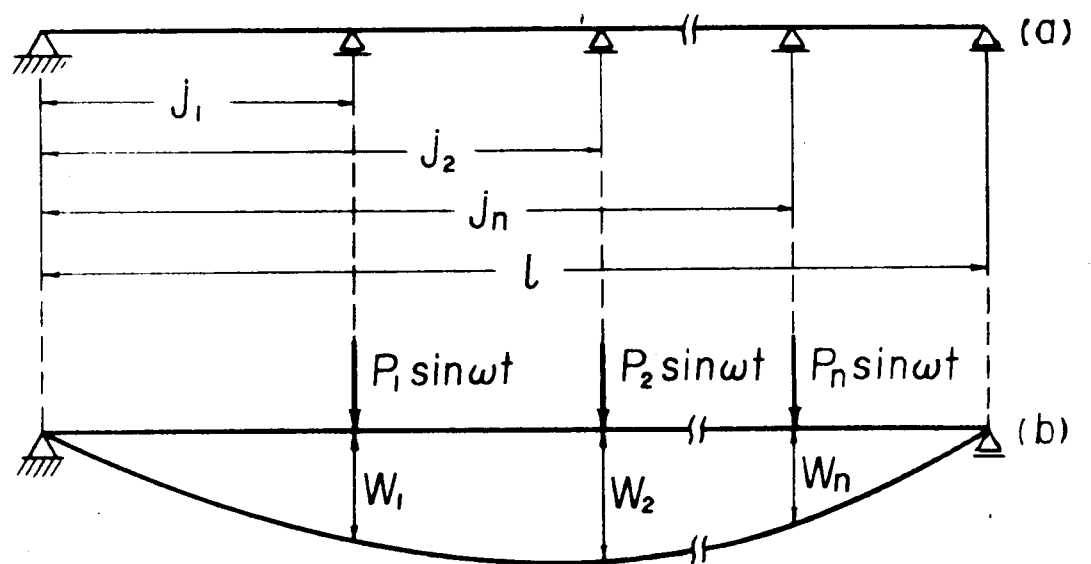


Fig. 3.3.3.1

に集中荷重  $P_i \sin \omega t$ , ( $i=1, 2, \dots, n$ ) を中間支点のあった位置に作用させる。この時の載荷点の撓み  $W_i^P$  は式 (3.3.2.9) により求められる。然るに与えられた連続梁上の中間支点では撓みは零、すなわち

$$W_1 = W_2 = \dots = W_n = 0$$

である。これより次式が得られる。

$$\begin{bmatrix} a_{11}^P & a_{12}^P & \dots & a_{1n}^P \\ a_{21}^P & a_{22}^P & \dots & a_{2n}^P \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}^P & a_{n2}^P & \dots & a_{nn}^P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_n \end{bmatrix} = 0 \quad (3.3.3.1)$$

すべてが零でない  $P_i$ , ( $i=1, 2, \dots, n$ ) の値に対して上式が成立するためには

$$\begin{bmatrix} a_{11}^P & a_{12}^P & \dots & a_{1n}^P \\ a_{21}^P & a_{22}^P & \dots & a_{2n}^P \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}^P & a_{n2}^P & \dots & a_{nn}^P \end{bmatrix} = 0 \quad (3.3.3.2)$$

が必要である。上式は振動数方程式に他ならない。これを解いて得られた固有振動数  $\omega_c$ , ( $c=1, 2, 3, \dots, \infty$ ) の値を式 (3.3.3.1) に代入すれば  $P_1, P_2, \dots, P_n$  の比が決定できる。この比を式 (3.3.2.5) に代入すれば連続梁の振動モード  $\varphi_c(x)$

が決定できる。単純梁の振動モード  $\Phi_m(x)$  は表-2.3.2 によ  
えられる正弦波関数であるから、上述の解析法では連続梁  
の振動モードを  $\sin$  のフーリエ級数に展開したことになる。いまこ  
れを次式のように書けたとする。

$$\varphi_c(x) = d_1 \sin \frac{\pi x}{l} + d_2 \sin \frac{2\pi x}{l} + \dots \quad (3.3.3.3)$$

この正規化した振動モード  $\Phi_c(x)$  は次式により求めることができる。

$$\Phi_c(x) = \left\{ \frac{2}{M} \cdot \frac{1}{d_1^2 + d_2^2 + \dots} \right\}^{1/2} \left( \sum_{i=1}^{\infty} d_i \sin \frac{i\pi x}{l} \right) \quad (3.3.3.4)$$

ここに  $M$  : 連続梁の質量

上に述べた方法によると正規化モード  $\Phi_c(x)$  を式(3.3.3.4)の  
簡単な式で決定できる利点がある。さらに、振動撓角法など  
の後来の解析法では、振動モード  $\Phi_c(x)$  の関数は各スパンごと  
に異なったものとなるが、この方法によると全スパンにわたって一  
つの関数で表示できる。

### 3.3.4 変位支承を有する連続梁

図-3.3.4.1(a)に示す連続梁について考える。直接この振動  
系の固有振動数・振動モードを求めるにはかなり複雑な解析  
を必要とするので、ここではこの系の支持条件を順次満足させ  
ながら解析を進める方法をとる。

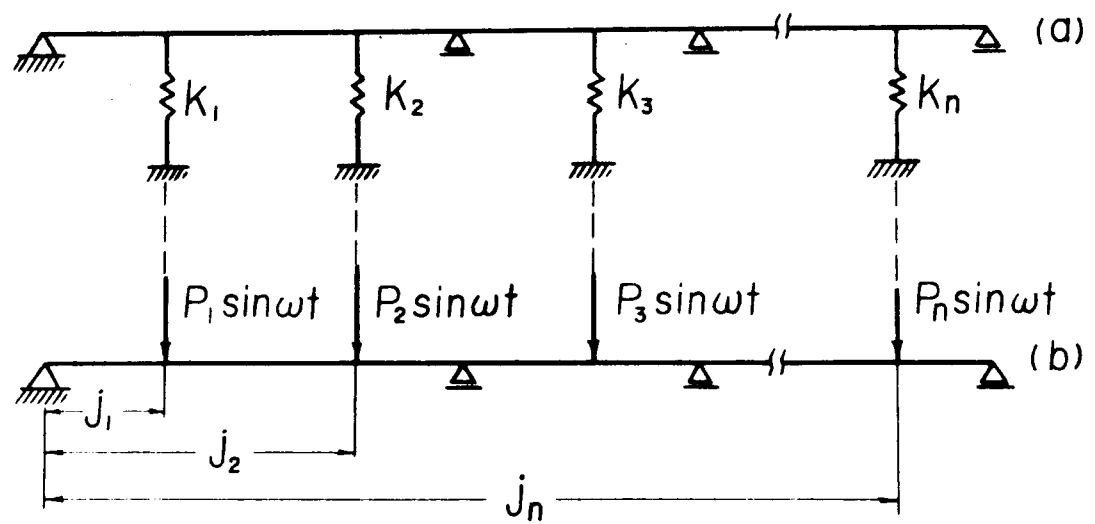


Fig. 3.3.4.1



まず図-3.3.4.1(b)に示すように変位支承を取り去った連続梁について考える。この連続梁の固有振動数 $\omega_c$ 、振動モード $\Phi_c(x)$ は3.3.3で述べた方法により求めることができる。この $\Phi_c(x)$ は原振動系(a図)の中拘支束の条件を満足しているから、この $\Phi_c(x)$ を用い、これに弾性支持の条件を満足させることを考える。

いま、この連続梁の変位支承のあった處に集中荷重 $P_i \sin \omega t$  ( $i=1, 2, 3, \dots, n$ )を作用させよ(b図)。この時荷重處の撓み $W_1, W_2, \dots, W_n$ は式(3.3.2.9)により求めることができる。ここに $a_{ij}$  ( $i, j=1, 2, \dots, n$ )には次に示すものを使用する。

$$a_{ij} = \sum_{c=1}^{\infty} \frac{1}{\omega_c^2 - \omega^2} \cdot \Phi_c(x_i) \Phi_c(x_j)$$

$\omega_c$ : 連続梁の固有振動数

$\Phi_c(x)$ : 連続梁の正規化モード

変位支承のバネ常数を $k_i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ )とすると荷重と変形との関係は次式によりあらわされる。

$$W_i = P_i^s / k_i = k_i' P_i^s \quad (3.3.4.1)$$

$$(i=1, 2, \dots, n)$$

図-3.3.4.1(b)に示す連続梁に集中荷重 $P_i$ を作用させたとき、その荷重處における変位と荷重との関係は式(3.3.2.9)により与え

られる。この連続梁に式(3.3.4.1)の關係を持つ変位支承を結合すれば、図-3.3.4.1(a)の原振動系ができる。このためには兩者の変位を等しく置く必要があるが、これは解析的には式(3.3.2.9)と式(3.3.4.1)とを等置することにより満足できる。このようにして組立てられた系には、そのバネとの接合部において

$$P_i + P_i^s = p_i, \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (3.3.4.2)$$

によりあらわされる外力が作用していることになる。自由振動している時には外力は零である筈であるから上式は次式となる。

$$P_i + P_i^s = p_i = 0$$

上記の關係を式(3.3.2.9)と式(3.3.4.1)とを等置したものに代入すると次式となる。

$$\begin{bmatrix} a_{11}^P + k_1' & a_{12}^P & \cdots & a_{1n}^P \\ a_{21}^P & a_{22}^P + k_2' & \cdots & a_{2n}^P \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}^P & a_{n2}^P & \cdots & a_{nn}^P + k_n' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_n \end{bmatrix} = 0 \quad (3.3.4.3)$$

すべてが零でない  $P_i$  の値に対して上式が成立するためにはその係数行列が零でなければならない。すなわち

$$\begin{pmatrix} a_{11}^P + k_1' & a_{12}^P & \cdots & a_{1n}^P \\ a_{21}^P & a_{22}^P + k_2' & \cdots & a_{2n}^P \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}^P & a_{n2}^P & \cdots & a_{nn}^P + k_n' \end{pmatrix} = 0 \quad (3.3.4.4)$$

式(3.3.4.4)は振動数方程式に他ならない。式(3.3.4.4)より得られた固有振動数 $\omega_s$ , ( $s = 1, 2, 3, \dots, \infty$ )の値を式(3.3.4.3)に代入すると,  $P_1, P_2, \dots, P_n$ の比が決定できるから, この比を式(3.3.2.5)に代入すると振動モード $\varphi_s(x)$ が決定できることになる。ただし式(3.3.2.5)における $\omega_m, \omega, \bar{\varphi}_m(x_i)$ には式(3.3.3.2)より求める連続梁の固有振動数 $\omega_c$ , 式(3.3.4.4)より得られる $\omega_s$ , 式(3.3.3.4)により与えられる連続梁の振動モード $\bar{\varphi}_c(x)$ をそれぞれ使用する。

いま中間支真数を $m$ , 弾性支承数を $n$ とすれば, 変形等置法によると $m$ 次の行列(式(3.3.3.2))と $n$ 次の行列(式(3.3.4.4))とをそれぞれ計算するが, 振動撓角法では $2(m+n)$ 次の行列の計算を必要とすることに留意されたい。このように行列次数を下げることで数値計算が容易になることは言うまでもない。このことは3.3.5にのべる回転支承に対しても同様である。

### 3.3.5 回転支承を有する連続梁

図-3.3.5.1(a)に示す連続梁について考える。ただし、この回転支承は回転剛性のみを有し、鉛直方向の変位に対しては自由に変形しうるものとする。

いま、この回転支承を切り離し、中間支承のみを有する連続梁(図-3.3.5.1(b))について考える。この連続梁のもと回転支承のあった箇所に図-3.3.5.1(b)に示すような周期モーメント荷重  $M_i \sin \omega t$ , ( $i=1, 2, 3, \dots, n$ ) を作用させ、このときの撓み角を求めることについて考えてみる。この連続梁の固有振動数  $\omega_c$ , 振動モード  $\bar{\phi}_c(x)$  を使用すれば、載荷点の撓み角  $\theta_i$ , ( $i=1, 2, 3, \dots, n$ ) とモーメント荷重との関係は式(3.3.2.12)にて与えられる。ただし  $b_{ij}^M$  には次式を使用する。

$$b_{ij}^M = \sum_{c=1}^{\infty} \frac{1}{\omega_c^2 - \omega^2} \cdot \bar{\phi}_c'(x_i) \bar{\phi}_c'(x_j)$$

回転支承の回転剛性を  $N_i$ , ( $i=1, 2, 3, \dots, n$ ) とすれば、モーメント荷重と回転角との関係は式(3.3.5.1)にてあらわされる。

$$\theta_i = N_i M_i^s \quad (3.3.5.1)$$

3.3.4において述べたと同様の解析手法をとると、連続梁と回転支承とが結合できて式(3.3.5.2)が得られさらに振動数方程式は式(3.3.5.3)により与えられる。

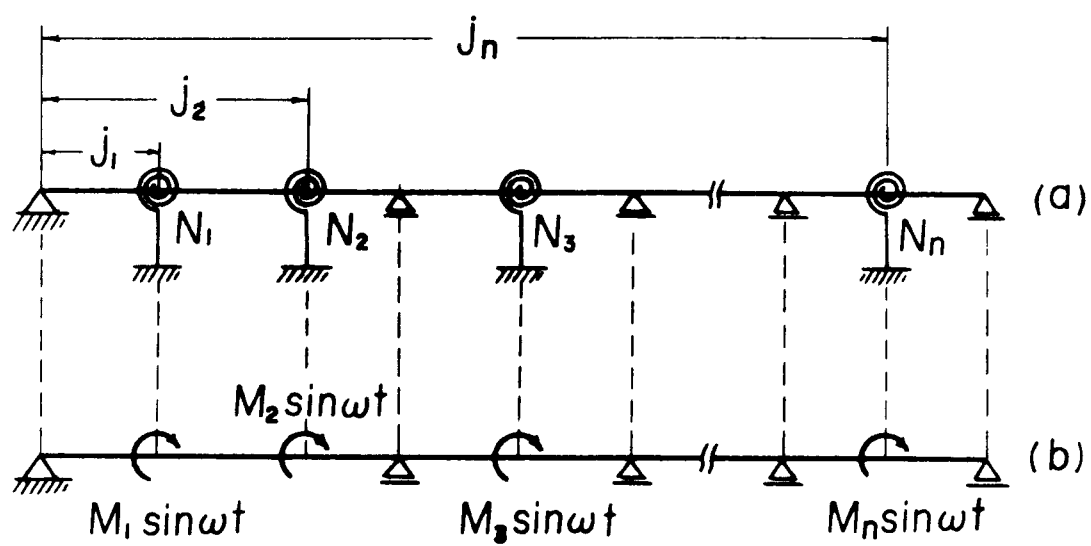


Fig.3.3.5.1

$$\begin{bmatrix} b_{11}^M + N_1 & b_{12}^M & \cdots & b_{1n}^M \\ b_{21}^M & b_{22}^M + N_2 & \cdots & b_{2n}^M \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1}^M & b_{n2}^M & \cdots & b_{nn}^M + N_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_n \end{bmatrix} = 0 \quad (3.3.5.2)$$

$$\begin{vmatrix} b_{11}^M + N_1 & b_{12}^M & \cdots & b_{1n}^M \\ b_{21}^M & b_{22}^M + N_2 & \cdots & b_{2n}^M \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1}^M & b_{n2}^M & \cdots & b_{nn}^M + N_n \end{vmatrix} = 0 \quad (3.3.5.3)$$

式(3.3.5.3)より得られた固有振動数  $\omega_g$ , ( $g=1, 2, \dots, \infty$ ) の値を式(3.3.5.2)に代入すれば  $M_i$ , ( $i=1, 2, 3, \dots, n$ ) の比が求められるので, この比を式(3.3.2.7)に代入して振動モード  $\varphi_g(x)$  が決定できる。ただし式(3.3.2.7)の  $\omega_m, \omega, \bar{\varphi}_m(x_i)$  には  $\omega_c, \omega_g, \bar{\varphi}_c(x_i)$  を使用する。

### 3.3.6 変位回転支承を有する連続梁

図-3.3.6.1(a)に示す連続梁について考える。この弾性支承は変位・回転ともに抵抗を有するものであり, その剛性を式(3.3.4.1), (3.3.5.1)に示す  $k'_i, N_i$ , ( $i=1, 2, \dots, n$ ) にてあらわすことにする。

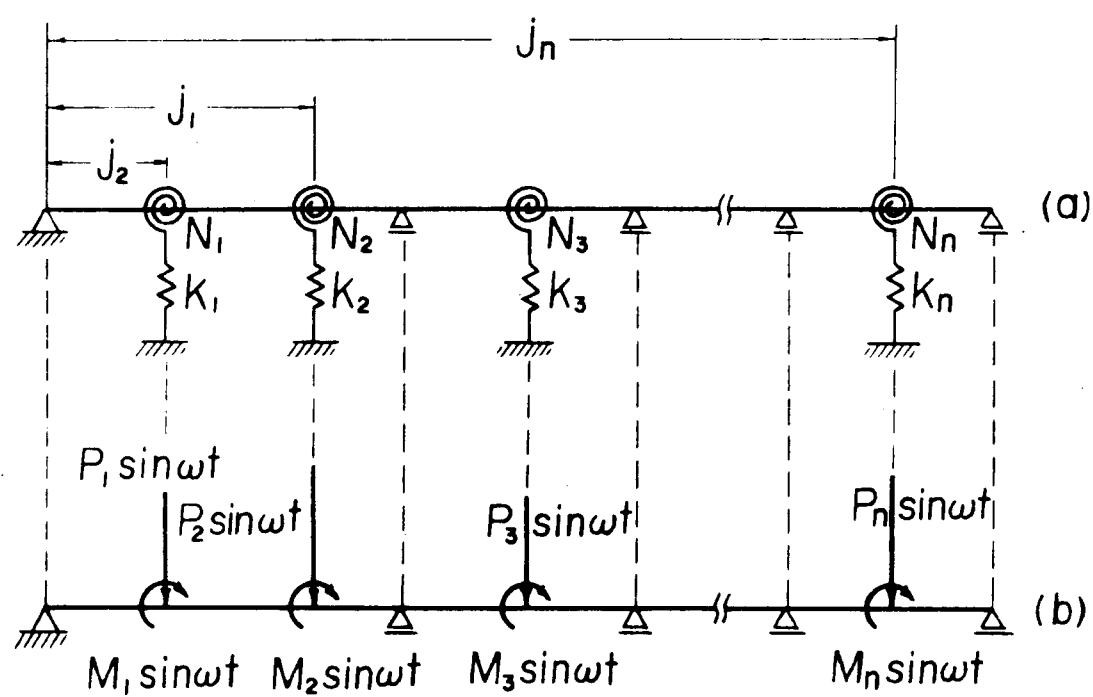


Fig. 3.3.6.1

## (i) 第1法

まず図-3.3.6.1(b)に示すように弾性支承を取り除いた連続梁に集中荷重  $P_i \sin \omega t$ ,  $M_i \sin \omega t$ , ( $i=1, 2, 3, \dots, n$ ) を作用させる。この時の載荷点の撓み  $W_i$ ,  $\theta_i$  は式 (3.3.2.9) ~ (3.3.2.12) より次式のように与えられる。

$$\begin{pmatrix} W_1 \\ W_2 \\ \vdots \\ W_n \\ \theta_1 \\ \theta_2 \\ \vdots \\ \theta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}^P & a_{12}^P & \cdots & a_{1n}^P & a_{11}^M & a_{12}^M & \cdots & a_{1n}^M \\ a_{21}^P & a_{22}^P & \cdots & a_{2n}^P & a_{21}^M & a_{22}^M & \cdots & a_{2n}^M \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}^P & a_{n2}^P & \cdots & a_{nn}^P & a_{n1}^M & a_{n2}^M & \cdots & a_{nn}^M \\ b_{11}^P & b_{12}^P & \cdots & b_{1n}^P & b_{11}^M & b_{12}^M & \cdots & b_{1n}^M \\ b_{21}^P & b_{22}^P & \cdots & b_{2n}^P & b_{21}^M & b_{22}^M & \cdots & b_{2n}^M \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1}^P & b_{n2}^P & \cdots & b_{nn}^P & b_{n1}^M & b_{n2}^M & \cdots & b_{nn}^M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_n \\ M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_n \end{pmatrix} \quad (3.3.6.1)$$

ここに

$$a_{ij}^P = \sum_{c=1}^{\infty} \frac{1}{\omega_c^2 - \omega^2} \cdot \bar{\Phi}_c(x_i) \bar{\Phi}_c(j_j), \quad b_{ij}^P = \sum_{c=1}^{\infty} \frac{1}{\omega_c^2 - \omega^2} \cdot \bar{\Phi}_c'(x_i) \bar{\Phi}_c(j_j)$$

$$a_{ij}^M = \sum_{c=1}^{\infty} \frac{1}{\omega_c^2 - \omega^2} \cdot \bar{\Phi}_c(x_i) \bar{\Phi}_c'(j_j), \quad b_{ij}^M = \sum_{c=1}^{\infty} \frac{1}{\omega_c^2 - \omega^2} \cdot \bar{\Phi}_c'(x_i) \bar{\Phi}_c'(j_j)$$

$\omega_c$ : 連続梁の固有振動数

$\bar{\Phi}_c(x)$ : 連続梁の正規化モード



図-3.3.6.1(b)の連続梁に集中荷重・モーメント荷重が作用するときの撓み・撓み角が上式により決定できるから、3.3.4において述べた解析手法をここで繰り返して弾性支承を連続梁に結合すると式(3.3.6.2)が得られ、さらに与系の固有振動数を式(3.3.6.3)により求めることができる。

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}^P & \cdots & a_{1n}^P & a_{11}^M & a_{12}^M & \cdots & a_{1n}^M \\ a_{21}^P & a_{22} & \cdots & a_{2n}^P & a_{21}^M & \cdots & a_{2n}^M \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}^P & a_{n2}^P & \cdots & a_{nn} & a_{n1}^M & \cdots & a_{nn}^M \\ b_{11}^P & b_{12}^P & \cdots & b_{1n}^P & b_{11}^M & b_{12}^M & \cdots & b_{1n}^M \\ b_{21}^P & b_{22}^P & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & b_{2n}^M \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1}^P & b_{n2}^P & \cdots & b_{nn}^P & b_{n1}^M & \cdots & b_{nn}^M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_n \\ M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_n \end{pmatrix} = 0$$

~~~~~ (3.3.6.2)

$$\therefore a_{ii} = a_{ii}^P + k_i' \quad , \quad b_{ii} = b_{ii}^M + N_i \quad (i = 1, 2, 3, \cdots, n)$$

$$\begin{vmatrix}
 a_{11} & a_{12}^P & \cdots & a_{1n}^P & a_{11}^M & a_{12}^M & \cdots & a_{1n}^M \\
 a_{21}^P & a_{22} & \cdots & a_{2n}^P & a_{21}^M & \cdots & a_{2n}^M & \\
 \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
 a_{n1}^P & a_{n2}^P & \cdots & a_{nn} & a_{n1}^M & \cdots & a_{nn}^M & \\
 b_{11}^P & b_{12}^P & \cdots & b_{1n}^P & b_{11}^M & b_{12}^M & \cdots & b_{1n}^M \\
 b_{21}^P & b_{22}^P & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & b_{2n}^M \\
 \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
 b_{n1}^P & b_{n2}^P & \cdots & b_{nn}^P & b_{n1}^M & \cdots & b_{nn}^M & 
 \end{vmatrix} = 0 \quad (3.3.6.3)$$

式 (3.3.6.3) より得られた固有振動数  $\omega_k$ , ( $k=1, 2, \dots, \infty$ ) の値を式 (3.3.6.2) に代入すれば  $P_i$ ,  $M_i$ , ( $i=1, 2, \dots, n$ ) の比を決定することができる。一方、連続梁に集中荷重とモーメント荷重が作用するときの撓みは式 (3.3.2.5), (3.3.2.7) より次式にてあらわされる。

$$\begin{aligned}
 W(x_i) = \sum_{c=1}^{\infty} \Omega_c \Phi_c(x_i) & \left\{ \{ \Phi_c(j_1) P_1 + \Phi_c(j_2) P_2 + \cdots + \Phi_c(j_n) P_n \} \right. \\
 & \left. + \{ \Phi_c'(j_1) M_1 + \Phi_c'(j_2) M_2 + \cdots + \Phi_c'(j_n) M_n \} \right\} \quad (3.3.6.4)
 \end{aligned}$$

式 (3.3.6.4) に上で求めた  $P_i$ ,  $M_i$  の比を代入すれば振動モード  $\varphi_k(x)$  が決定できる。

## (ii) 第2法

第1法においては、弾性支承上の変位・回転の条件を同時に

満足するようにして解析を行なったが、第2法では変位と回転との条件を逐次満足させる方法を探らう。

与えられた図-3.3.6.1(a)の振動系において、まず回転抵抗が零すなわち  $N_1 = N_2 = \dots = N_n = 0$  なる系(図-3.3.4.1(a)と等価な系)について考える。この系の固有振動数  $\omega_s$  と振動モード  $\Phi_s(x)$  は3.3.4において述べた方法により求めることができる。この  $\omega_s$ ,  $\Phi_s(x)$  に回転剛性の条件を入れれば目的が達せられるが、これは3.3.5において述べた式において、たんに  $\omega_c$ ,  $\Phi_c(x)$  のかわりに  $\omega_s$ ,  $\Phi_s(x)$  と置き換えればよいことは容易に理解できる。この方法によると、中間支束の条件は  $\omega_c$ ,  $\Phi_c(x)$  により満足され、これに変位抵抗の条件も満足させ、最後に回転抵抗の条件も満足させることになり、単純支持と変位および回転の条件を逐次満足させたことになる。第1法においては1つの弾性支承に対して2つの未知数を必要とするから、 $n$  個の弾性支承を持つ場合には  $2n$  個の未知数を取り扱う必要がある。従って、 $n$  が大きいときには式(3.3.6.3)の数値計算にかなりの労力を要するが、第2法によれば  $n$  個の未知数のものについて2回計算すればよいことになるので数値計算はかなり容易になるものと考えられる。

### 3.3.7 固定端を有する弾性支承上の連続梁

#### (i) 一端固定の場合

図-3.3.7.1(a)に示す一端固定の連続梁の固有振動数 $\omega_k$ ・振動モード $\varphi_k(x)$ を求めることについて考える。これには、図-3.3.7.1(b)に示すように固定端を単純支持点に置いた系について考え、この系に端モーメント $M \sin \omega t$ を加えて載荷点の撓み角を零にする方法をとる。

図-3.3.7.1(b)の固有振動数 $\omega_k$ ・振動モード $\Phi_k(x)$ は3.3.6に述べた方法により決定することができる。従って、この振動モードを $x=0$ において角度が零になるように決定すればよい。端モーメント荷重 $M \sin \omega t$ が作用するとき載荷点の撓み角 $\theta(x_i=0)$ は式(3.3.2.4)より次式により求めることができる。

$$\theta(x_i=0) = \sum_{k=1}^{\infty} \Omega_k \Phi'_k(x_i=0) \Phi'_k(x_j=0) M \quad (3.3.7.1)$$

$$\text{ここに } \Omega_k = 1/(\omega_k^2 - \omega^2)$$

固定端においては $\theta=0$ であるから、式(3.3.7.1)は式(3.3.7.2)となる。

$$\sum_{k=1}^{\infty} \Omega_k (x_i=0) \Phi'_k(x_j=0) = 0 \quad (3.3.7.2)$$

式(3.3.7.2)は振動数方程式に他ならない。また振動モード

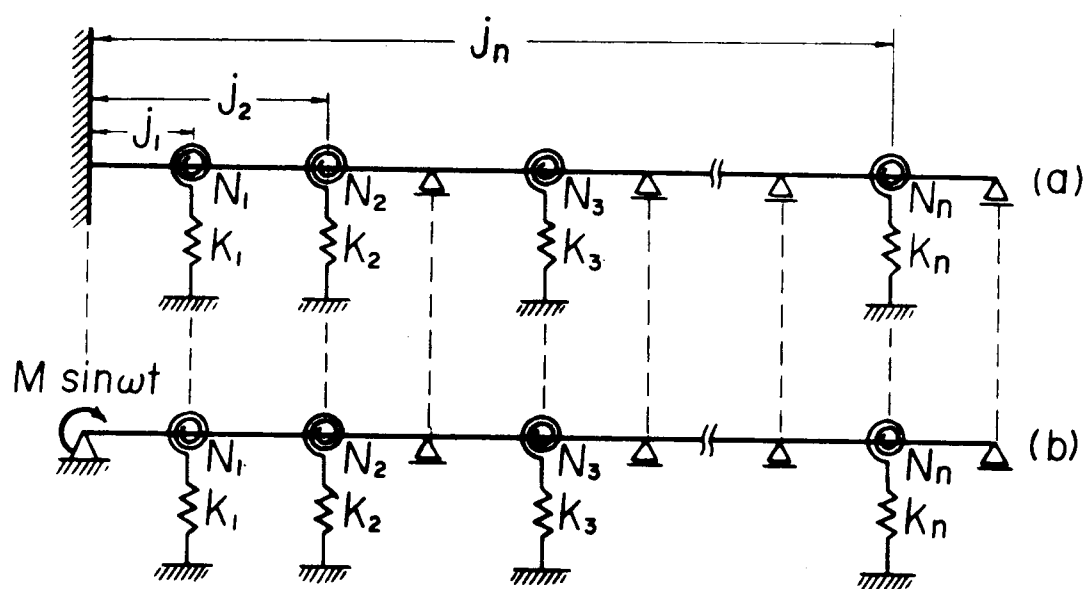


Fig.3.3.7.1

$\varphi_2(x)$  は式 (3.3.7.2) より得られた  $\omega_2$  の値を式 (3.3.2.3) に代入すれば直ちに得られる。ただし式 (3.3.2.3) における  $\Omega_m, \bar{\Phi}_m(x)$  の代りに  $\Omega_k, \bar{\Phi}_k(x)$  を使用する。

(ii) 両端固定の場合

図 - 3.3.7.2 (a) に示す両端固定の連続梁について考える。

(i) の場合と同じく始めに図 - 3.3.7.2 (b) の系について考え、この両端に端モーメント  $M_A \sin \omega t, M_B \sin \omega t$  を作用させる。このとき A, B 点の撓み角  $\theta_A, \theta_B$  は式 (3.3.7.3) により与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \theta_A &= \sum_{k=1}^{\infty} \Omega_k \bar{\Phi}'_k(x_i=0) \bar{\Phi}'_k(x_j=0) M_A + \sum_{k=1}^{\infty} \Omega_k \bar{\Phi}'_k(x_i=0) \bar{\Phi}'_k(x_j=L) M_B \\ \theta_B &= \sum_{k=1}^{\infty} \Omega_k \bar{\Phi}'_k(x_i=L) \bar{\Phi}'_k(x_j=0) M_A + \sum_{k=1}^{\infty} \Omega_k \bar{\Phi}'_k(x_i=L) \bar{\Phi}'_k(x_j=L) M_B \end{aligned} \right\} \quad \text{---- (3.3.7.3)}$$

固定端の場合  $\theta_A = \theta_B = 0$  であるから式 (3.3.7.4) が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \Omega_k \bar{\Phi}'_k(x_i=0) \bar{\Phi}'_k(x_j=0) M_A + \sum_{k=1}^{\infty} \Omega_k \bar{\Phi}'_k(x_i=0) \bar{\Phi}'_k(x_j=L) M_B &= 0 \\ \sum_{k=1}^{\infty} \Omega_k \bar{\Phi}'_k(x_i=L) \bar{\Phi}'_k(x_j=0) M_A + \sum_{k=1}^{\infty} \Omega_k \bar{\Phi}'_k(x_i=L) \bar{\Phi}'_k(x_j=L) M_B &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \text{----- (3.3.7.4)}$$

従って振動数方程式は次式となる。

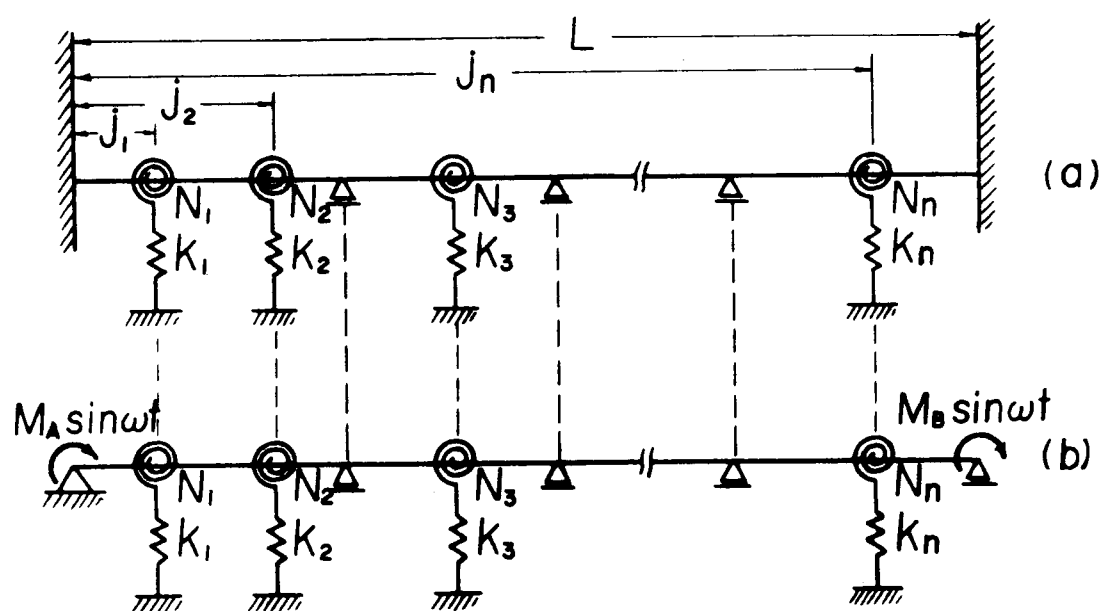


Fig. 3.3.7.2

$$\left| \begin{array}{cc} \sum_{k=1}^{\infty} \Omega_k \bar{\Phi}'_k(x_i=0) \bar{\Phi}'_k(x_j=0) & \sum_{k=1}^{\infty} \Omega_k \bar{\Phi}'_k(x_i=0) \bar{\Phi}'_k(x_j=L) \\ \sum_{k=1}^{\infty} \Omega_k \bar{\Phi}'_k(x_i=L) \bar{\Phi}'_k(x_j=0) & \sum_{k=1}^{\infty} \Omega_k \bar{\Phi}'_k(x_i=0) \bar{\Phi}'_k(x_j=L) \end{array} \right| = 0$$

----- (3.3.7.5)

式(3.3.7.5)を解いて求められる固有振動数 $\omega_n$ , ( $n=1, 2, 3, \dots, \infty$ )の値を式(3.3.7.4)に代入し,  $M_A, M_B$ の比を決定し, これを式(3.3.2.7)に代入すれば振動モード $\varphi_n(x)$ が決定できる。ただし式(3.3.2.7)における $\Omega_m, \bar{\Phi}_m(x)$ には $\Omega_n, \bar{\Phi}_n(x)$ を使用する。

例として図-3.3.7.3(a)に示す一端固定他端単純支持の梁の固有振動数を求めることについて考えてみる。図-3.3.7.3(b)の単純梁の固有振動数 $\omega_m$ , 振動モード $\bar{\Phi}_m(x)$ は表-2.3.2に示されている。これらを式(3.3.7.2)に使用すると式(3.3.7.6)となる。

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{m^2}{\omega_m^2 - \omega^2} = 0 \quad (3.3.7.6)$$

式(3.3.7.6)を書きかえると式(3.3.7.7)となる。

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{m^2}{m^4 - \omega'} = 0 \quad (3.3.7.7)$$

$$\approx 2 \text{ に } \omega' = \omega^2 / \omega_1^2, \quad \omega_1^2 = \left( \frac{\pi}{l} \right)^4 \frac{EI}{P}$$



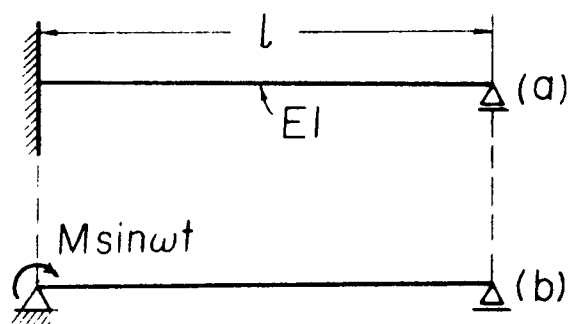


Fig. 3.3.7.3

式(3.3.7.7)を試算法により求めると最低次のものに対して  $\omega' = 2.4404$  を得る。これは厳密解より得た値<sup>33)</sup>と一致する。また、振動モードはこの  $\omega'$  の値を使用して式(3.3.2.7)により決定できる。

### 3.3.8 多くの支承を持つ連続梁

梁が多くの支承によって支持されているときには、この条件を同時に満足させるようにして式(3.3.6.3)をたてると数値計算が非常にはん雑になる。これを避ける方法として 3.3.6 (ii) に述べたように単純支持・変位・回転の条件を順次導入していく方法も数値計算を容易にする一方法ではあるが、ここでは下記の解析法について述べる。

図-3.3.8.1(a)に示す連続梁を例にとって考える。これを適当な支持点  $A_i$  点において切断し、図に示す(b)系と(c)系の2つの系にわけると。まずこの(b), (c)系の固有振動数  $\omega_{bu}, \omega_{cu}$  および振動モード  $\Phi_{bu}, \Phi_{cu}$  を上述の適当な方法により決定する。この(b), (c)系の  $A_i$  点に  $M_b, M_c$  なる周期モーメントを作用させたときこの載荷点の撓み角  $\theta_b, \theta_c$  は式(3.3.2.4)により下式にてあらわされる。

$$\left. \begin{aligned} \theta_b &= \sum_{u=1}^{\infty} \Omega_{bu} \Phi'_{bu}(x_{bi}) \Phi'_{bu}(x_{bj}) M_b \\ \theta_c &= \sum_{u=1}^{\infty} \Omega_{cu} \Phi'_{cu}(x_{ci}) \Phi'_{cu}(x_{cj}) M_c \end{aligned} \right\} \quad (3.3.8.1)$$

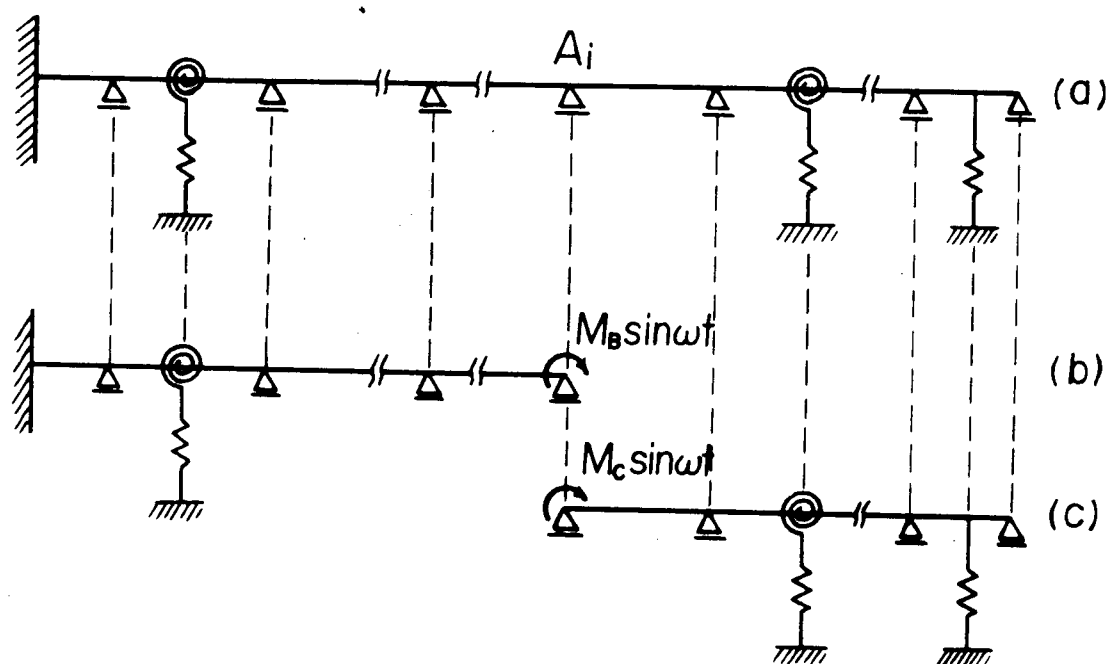


Fig. 3.3.8.1

$$\therefore \Omega_{bu} = 1/(\omega_{bu}^2 - \omega^2), \quad \Omega_{cu} = 1/(\omega_{cu}^2 - \omega^2)$$

この (b), (c) 系を結合すれば与系 (a 図) ができるが, これを式で表現すると式 (3.3.8.1) の両者を等置することになる. さらにこのようにして組立てられた原振動系には, その結合系において

$$M_b + M_c = M_0$$

なるモーメント荷重が作用しているのでこれまでと同様の手法により, すなわち自由振動時には外力は零 ( $M_0 = 0$ ) という条件を使用して振動数方程式が次のように得られる.

$$\left\{ \sum_{u=1}^{\infty} \Omega_{bu} \Phi'_{bu}(x_{bi}) \Phi'_{bu}(x_{bj}) \right\} + \left\{ \sum_{u=1}^{\infty} \Omega_{cu} \Phi'_{cu}(x_{ci}) \Phi'_{cu}(x_{cj}) \right\} = 0$$

----- (3.3.8.2)

また振動モードは式 (3.3.8.2) より得られた固有振動数の値を式 (3.3.2.3) に代入すれば直ちに決定できる. ただし式 (3.3.2.3) 中の文字  $m$  の代りに  $bu$  または  $cu$  を使用する必要がある.

### 3.3.9 結語

3.3 においては変形等置法により弾性支承上の梁が解析できることを示した. この方法は一本の連続した梁に支承を直接結合してゆく方法である. これに対し従来の理論 (例えば振動撓角法・動的3連モーメント法) では, まず一本の梁を支承上

において各スパンごとに分割し、その切断した梁の両端と支承とを結合する方法をとっている。このように変形等置法は従来の理論と異なる考え方にもとづくものであるが、工学的分野においてはその実用上の便利さが大切であるのでこの両者について若干の比較を行なってみよう。

従来の方法では梁を支承上において切断する必要があるが、一たん切断してしまうとその切断点において取り扱う未知数は2つとなる(変形を未知数とするときは撓みと撓み角：力を未知数とするときはせん断力と曲げモーメント)。従って支承数を $n$ とすると振動数方程式は $2n$ 次の行列によりあらわされることになる。これに対し変形等置法は、例えば図-3.3.3.1, 図-3.3.4.1, 図-3.3.5.1に示す中間支承, 変位支承または回転支承上に梁がある場合, その振動数方程式は $n$ 次行列により与えることができる(式(3.3.3.2), (3.3.4.4), (3.3.5.3))。つまり連続した梁に支承を接続する方法をとれば梁を切断して求める場合と比較して振動数方程式の行列次数を半分にすることが可能になるわけである。また弾性支承が変位と回転の2つの要素を含む場合, この2者を同時に考慮して式もたてると振動数方程式は $2n$ 次の行列となるが(式(3.3.6.3)), 3.3.6.(ii)

に述べたようにこれらの要素を逐次導入していく方法をとると  $n$  次の行列 2 コに分解できる。さらに、振動数方程式の行列次数を下げる別法としては 3.3.8 に示したようにはじめに与系をいくつかのブロックに分割し、各ブロックごとに上記の方法で梁と支承とも結合した後各ブロックの両端を結合して元の系に組立てることにより基礎式を導く方法も考えられる。このように上述の方法をとれば支承数が多い場合においても同時に多くの未知数を取り扱うことなく振動数方程式が立てられるので数値計算も有利にすすめることができる。固有値問題も取り扱う場合その行列次数を減らすことができると静的問題とは比較にならぬ程数値計算の手間が節減できることを考えるとこの解析法の有利さが理解できると思う。

梁に結合する支承の順序は任意に変更できるので異なった種類の支承を有する梁に対しては同種の支承をグループにまとめこれを順次結合していく方法をとれば解析は便利となろう。

このように変形等置法は従来の方法より便利な解析手法と考えられるが、スパンごとに梁の断面が異なるものに対しては使用できない。この種の梁に対しては従来の解析理論による必要があるので、本理論はこの面で適用範囲に大きな制限をう

けるものである。

一本の連続した梁をもととしてこれに支承を結合させるような解析手法は 3.3.3 の連続梁についてはすでに使用されているものであるが弾性支承一般についてこの方法が適用されている例はないようである。とくに回転支承と固定端支承を梁に結合してその支承条件を満足させることは困難なものと考えられるが、これは式 (3.3.2.4) に示すモーメント荷重と撓み角との関係を使用して簡単に解決できた。式 (3.3.2.4) はさらに 3.3.8 に述べたブロックごとに分割して解析することも可能にした。このようなわけで式 (3.3.2.4) は変形等置法の適用範囲の拡張と数値計算の労力軽減に非常に役立つものである。

ここでは固有振動数と振動モードを求めることのみについて述べたが、これらを決定できれば 2.2 に述べた基礎式も使用して種々の動荷重に対する運動方程式は直ちに誘導できる。

3.3.5 に述べた回転支承は回転のみに抵抗を有し、変位に対しては自由に動きうるものとしたが、このようなモデルは実在の支承中には見当たらないかもしれない。しかし、支承が変位・回転ともに抵抗を有する場合 3.3.6.(ii) に述べたようにこの2者を別々にわけて取り扱うことが可能であるので、この場合回転支承は

必要となる。また 3.3.6.(ii) に述べたような解析手段を用いれば、始めに変位変換のみで得た結果と、さらに回転剛性をも考慮した結果との比較ができるので、この両者が最終結果にどの程度の影響も及ぼすものかを知ることができる。

### 3.4 梁と梁とよなる構造物 (格子桁・ラーメン)

#### 3.4.1 緒言

梁と梁とよりでできている構造物には格子桁・ラーメンなどがあるが、ここでは格子桁を例にとりこれを変形等置法により解析できることを示すこととする。<sup>27)</sup>

格子構造は相当古くから建築物・船舶・航空機などの広い分野にわたって使用されているので、これに関する研究はきわめて多い。しかし、これらの研究の多くは静力学的研究かあるいは実験をもとにした研究が大部分であり、固有振動数・振動モードあるいは移動荷重が作用するときのレスポンスなどに関するいわゆる動的な理論研究は非常に少ないようである。また現在まで行われている解析ではそのほとんどが梁を格子ごとと切断し、各スパンごとの梁に振動撓角法も適用して基礎変位を誘導する方法もとっているようである。このような



方法によれば一つの格点に対してこの未知数(変形も未知数とするときは、撓みと主桁・横桁の撓み角；力も未知数とするときはせん断力と主桁・横桁の端モーメント)を必要とするので、格点数を $n$ とすると振動数方程式は $3n$ 次の行列式となる。

これを変形等置法によって基礎式をたてると3.3に述べた弾性支承上の梁の場合と同様に、その振動数方程式の行列式の次数を $n$ とすることが出来る場合も生じる。このように次数を下げる事ができれば数値計算が非常に有利となることは言う迄もない。

従来格子桁の基礎式をたてるには格子を直接一体の構造として扱っている。これに対し変形等置法では主桁と横桁とも切りはなし、独立した一本の桁を単位構造物に選りその格子桁の格点となっていた箇所を集中荷重とモーメント荷重とを作用させて適当な変形を与え、主桁と横桁の接合点部の変形が同じになるように変形を調整したのち、主桁と横桁とを結び合せて一体の格子桁として組み立て基礎式を誘導する。

なお、一般の土木構造に用いられる格子桁橋の横桁のように両端の変位が零でないような梁を持つ格子では厳密な基礎式の誘導は可能ではあるが実際の数値計算は厄介とな

る。従ってここではこの種の横桁の質量を無視して数値計算を行なった。

なお、ここで取り扱う主桁・横桁の曲げ剛性・質量はそれぞれ異なっているが、その桁全体としては一様なものとする。

### 3.4.2 格子桁の振動数方程式と振動モード

変形等置法により格子桁の基礎式を導くには、はじめに梁に周期力(集中荷重とモーメント荷重)も作用させたときのレスポンスを求めておくことも必要とするが、この解はすでに3.3.2に与えているのでここでは重複をさけるために対応する式番号のみを列挙した。

| 3.3      | 3.4     |
|----------|---------|
| 3.3.2.5  | 3.4.2.1 |
| 3.3.2.6  | 3.4.2.2 |
| 3.3.2.7  | 3.4.2.3 |
| 3.3.2.8  | 3.4.2.4 |
| 3.3.2.9  | 3.4.2.5 |
| 3.3.2.10 | 3.4.2.6 |
| 3.3.2.11 | 3.4.2.7 |
| 3.3.2.12 | 3.4.2.8 |

理論の簡明を期するために、はじめに桁の接し剛性を無視した場合について基礎式を誘導し、最後にこの接し剛性を考慮しても基礎式の誘導が可能であることを示そう。

梁に強制周期力  $P_i \sin \omega t$ , ( $i=1, 2, \dots, n$ ) が作用するとき、

その載荷臭の撓みと荷重との関係は式(3.4.2.5)により与えられたが、これはその梁の固有振動数 $\omega_m$ 、振動モード $\Phi_m(x)$ が求められれば誘導できるものであるから、いまその載荷臭の格臭に選り、かつ $P_i$ と $Q_{ij}$ 、(式(3.3.2.9))とについてその属する主桁と横桁ともを区別するためにH, Qの肩記号をつける。

ここで図-3.4.2.1に示す $m$ 本の主桁・ $n$ 本の横桁が任意の方向に配置されている格子桁をとり、図に示すように格臭番号をつけると式(3.4.2.5)は主桁 $m$ に対して次式となる。

$$\begin{pmatrix} W_{m1}^H \\ W_{m2}^H \\ W_{m3}^H \\ \vdots \\ W_{mn}^H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{m1m1}^H & a_{m1m2}^H & \cdots & a_{m1mn}^H \\ a_{m2m1}^H & a_{m2m2}^H & \cdots & a_{m2mn}^H \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{mnm1}^H & a_{mnm2}^H & \cdots & a_{mnmn}^H \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_{m1}^H \\ P_{m2}^H \\ \vdots \\ P_{mn}^H \end{pmatrix} \quad (3.4.2.9)$$

横桁 $n$ に対しては式(3.4.2.10)となる。

$$\begin{pmatrix} W_{an}^Q \\ W_{bn}^Q \\ \vdots \\ W_{mn}^Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{anan}^Q & a_{anbn}^Q & \cdots & a_{anmn}^Q \\ a_{bnan}^Q & a_{bnbn}^Q & \cdots & a_{bnmn}^Q \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{mnan}^Q & a_{mnbn}^Q & \cdots & a_{mnmn}^Q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_{an}^Q \\ P_{bn}^Q \\ \vdots \\ P_{mn}^Q \end{pmatrix} \quad (3.4.2.10)$$

式(3.4.2.9), (3.4.2.10)で与えられるような変形を主桁・横桁

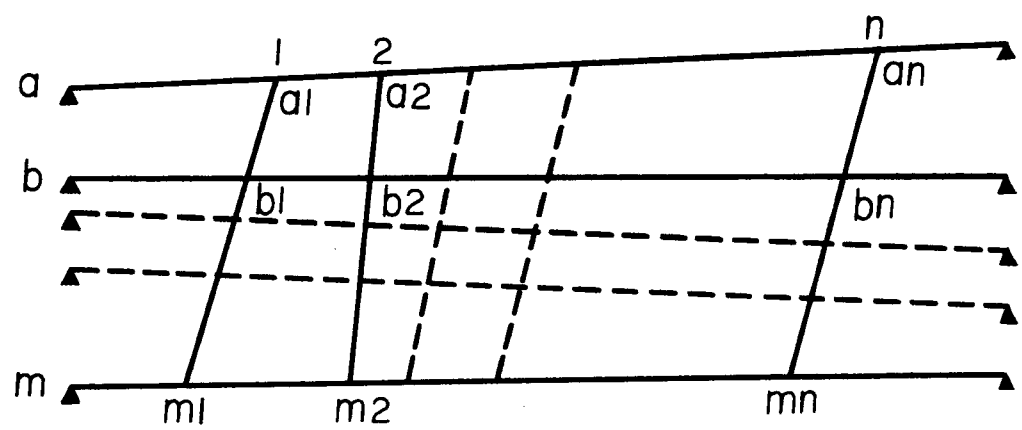


Fig.3.4.2.1

それぞれに与え、両者の格点変位を等しくした後それらを重ね合して格点を結合して格子桁を組み立てることを考える。これは解析的には同一格点における主桁と横桁との変位（例えば式(3.4.2.9)の $W_{mn}^H$ と式(3.4.2.10)の $W_{mn}^Q$ )を等置することによって満足される。またこのようにしてでき上った格子桁では、格点 $m, n$ を例にとると、その点に作用している外力は

$$P_{mn}^H + P_{mn}^Q = P_{mn} \quad (3.4.2.11)$$

で与えられる。格子桁が自由振動しているときには外力は零でなければならぬ。すなわち

$$P_{mn}^H + P_{mn}^Q = P_{mn} = 0 \quad (3.4.2.12)$$

上記の関係を各格点において主桁と横桁との変位を等置した式に使用すると式(3.4.2.13)が得られる。

$$\begin{pmatrix} a_{a1a1} & a_{a1a2}^H & \cdots & a_{a1an}^H & a_{a1b1}^Q & \cdots & a_{a1m1}^Q & \cdots \\ a_{a2a1}^H & a_{a2a2} & \cdots & a_{a2an}^H & a_{a2b2}^Q & \cdots & a_{a2m2}^Q & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & a_{b1b1} & a_{b1b2}^H & \cdots & a_{b1bn}^H & a_{b1a1}^Q & \cdots & a_{b1m1}^Q \\ \cdots & a_{b2b1}^H & a_{b2b2} & \cdots & a_{b2bn}^H & a_{b2a2}^Q & \cdots & a_{b2m2}^Q \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & a_{m1m1} & a_{m1m2}^H & \cdots & a_{m1an}^H & a_{m1b1}^Q & a_{m1a1}^Q & \cdots \\ \cdots & a_{m2m1}^H & a_{m2m2} & \cdots & a_{m2mn}^H & a_{m2b2}^Q & a_{m2a2}^Q & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & a_{mxm1}^H & a_{mxm2}^H & \cdots & a_{mxmn}^H & a_{mxbn}^Q & a_{mxa1}^Q & \cdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_{a1} \\ P_{a2} \\ \vdots \\ P_{an} \end{pmatrix} = 0$$



動次数)を求める振動数方程式に他ならない。

式(3.4.2.14)より求めた格子桁の固有振動数 $\omega_k$ の値を式(3.4.2.13)に代入すると格真力 $P_{ij}$ , ( $i=1, 2, \dots, m$ ;  $j=1, 2, \dots, n$ )の比が決定する。この格真力の比を式(3.4.2.1)に代入して主桁・横桁おのおのの振動モードが求められる。今後主桁・横桁を含めた格子桁全体の振動モードを $\varphi_k$ とあらわし、主桁・横桁の振動モードをそれぞれ $\varphi_{kh}^H$ ,  $\varphi_{kg}^Q$ にてあらわすことにする。ただし,  $h=1, 2, \dots, m$ ;  $g=1, 2, \dots, n$ 。

正規化した振動モード $\bar{\varphi}_k = C_k \varphi_k$ は、次式によりその係数 $C_k$ を決定すれば求められる。

$$C_k^2 \left[ \sum_{h=1}^m \int_{P_h} \{ \varphi_{kh}^H(s_h) \}^2 ds_h + \sum_{g=1}^n \int_{P_g} \{ \varphi_{kg}^Q(s_g) \}^2 ds_g \right] = 1 \quad \dots\dots (3.4.2.15)$$

ここに  $m(n)$ : 主桁(横桁)の桁数

$P_h(P_g)$ : 主桁 $h$ (横桁 $g$ )の単位長あたりの質量

$s_h(s_g)$ : 主桁 $h$ (横桁 $g$ )の座標

### 3.4.3 種々の格子桁への適用

3.4.2では格子桁の固有振動数と振動モードとの決定について述べたので、3.4.3ではこの理論を種々の格子桁に適用できることを示す。

前述のように変形等置法によるこの動的解析では、主桁・横桁何々について荷重と変形との関係、すなわち式(3.4.2.1)～(3.4.2.8)が求まればよい。その式中の常数は、主桁あるいは横桁一本一本の固有振動数 $\omega_m$ と正規化した振動モード $\varphi_m(x)$ が求まればただちに決定されるが、これらはすでに表-2.3.1, 表-2.3.2中にその関数を示した。また連続梁の $\omega_m$ と $\varphi_m(x)$ はその解析法を3.3.3に述べたので、図-3.4.3.1～図-3.4.3.3に示す構造の格子桁についてもその基礎式は容易に誘導できることは理解されると思う。

上記のように、この解析法では主桁・横桁の配置および支持条件はどのようなものであってもよいし、主桁・横桁の直交・斜交のいずれをも内包ない。これらのために特別の式を準備する必要はなく、ただ格点の座標だけが問題となっていることに留意されたい。

3.4.2においては主桁と横桁とに作用させる荷重として集中荷重のみを使用してきたが、このとき集中荷重のほかモーメント荷重も同時に作用させた(図-3.3.6.1(b))主桁と横桁ともを用いて3.4.2に述べたと同様の解析手順をふめば、桁の接し剛性をも考慮した基礎式の誘導が可能となる。この場合一格点に対して3つの未知数(集中荷重と主桁(横桁)のモーメント荷重)を必要とす



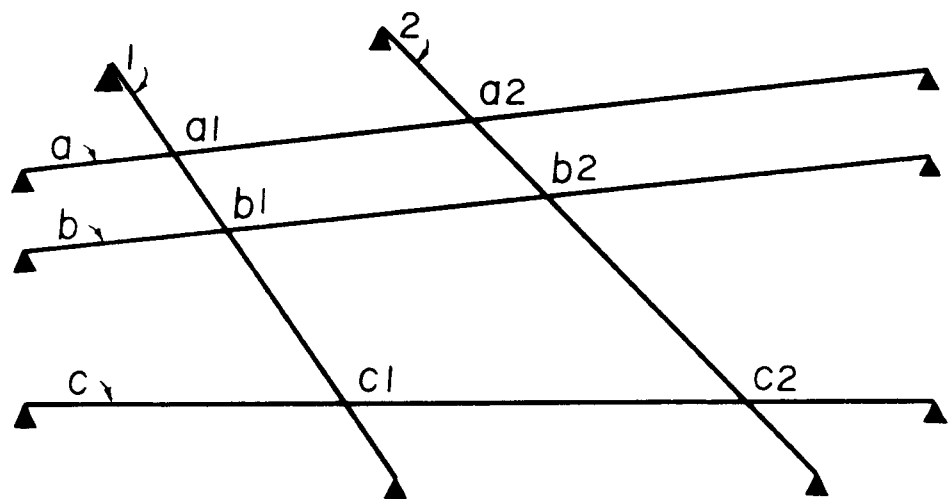


Fig.3.4.3.1

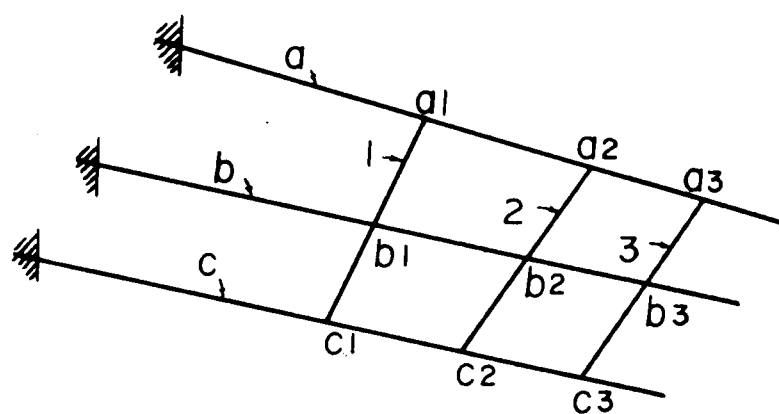


Fig.3.4.3.2

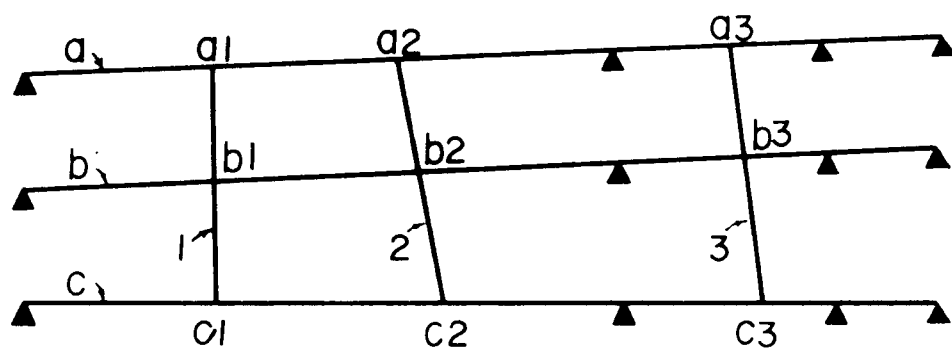


Fig.3.4.3.3

るので、格点数  $n$  とすると振動数方程式は  $3n$  次の行列式により与えられる。

### 3.4.4 数値計算例

これまで格子桁の固有振動数・振動モードを求める方法について述べてきたが、主桁が等間隔並列で横桁に直交する格子桁橋において主桁相互の曲げ剛性の相異や斜角の変化によってこれらの値がどのように変化するかを定量的に調べるために図-3.4.4.1に示す主桁3本・横桁1本の格子桁について数値計算を行なってみた。すなわち中桁の曲げ剛性  $EI$  を一定とし、外桁の曲げ剛性  $EI_R$  を変化させ、 $I_R/I = 1.5, 2$ ；斜角  $\theta = 90^\circ, 45^\circ$ ；横桁の曲げ剛性  $E\bar{I}$  については  $\bar{I}/I = 0.123$  とし、スパン  $l = 25.2\text{ m}$ 、中員  $\bar{l} = 10.2\text{ m}$  として計算を行なった。ただし横桁の質量は無視した。これについて求めた固有振動数の値を表-3.4.4.1に示した。ここでは単純梁との比較ができるよう中桁1次の固有振動数  $\omega_1$  との比により示した。またこのときの振動モードを図-3.4.4.2, 図-3.4.4.3に示した。

### 3.4.5 結語

3.4においては梁と梁とよりできている構造物のうち代表

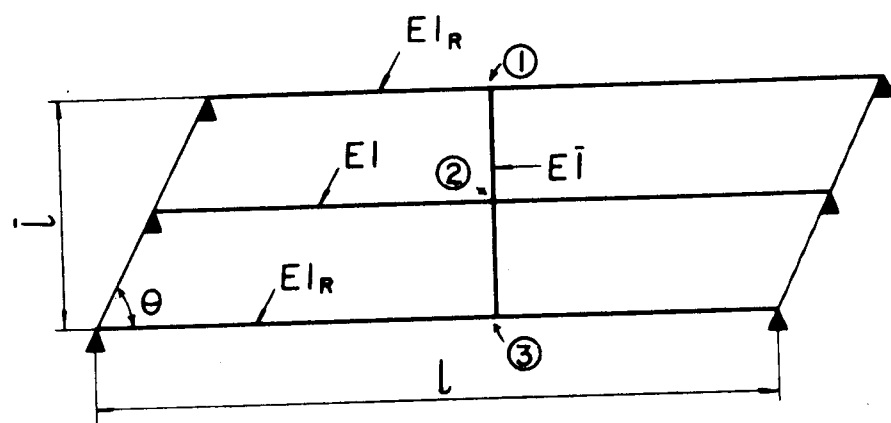


Fig.3.4.4.1

格子桁の固有振動数( $\omega_k$ )

| 斜角                                                                              | 振動<br>次数 | $I_F/I$ |       | 振動の<br>種類 |
|---------------------------------------------------------------------------------|----------|---------|-------|-----------|
|                                                                                 |          | 1.50    | 2.0   |           |
| $\theta = 90^\circ$                                                             | $k=1$    | 1.163   | 1.306 | 対 稱       |
|                                                                                 | 2        | 1.225   | 1.414 | 逆対称       |
|                                                                                 | 3        | 1.872   | 1.873 | 対 称       |
| $\theta = 45^\circ$                                                             | $k=1$    | 1.179   | 1.332 | 対 称       |
|                                                                                 | 2        | 1.225   | 1.414 | 逆対称       |
|                                                                                 | 3        | 1.793   | 1.806 | 対 称       |
| $\omega_1 = \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho}}$ , (中桁1次の固有振動数) |          |         |       |           |

表 - 3.4.4.1

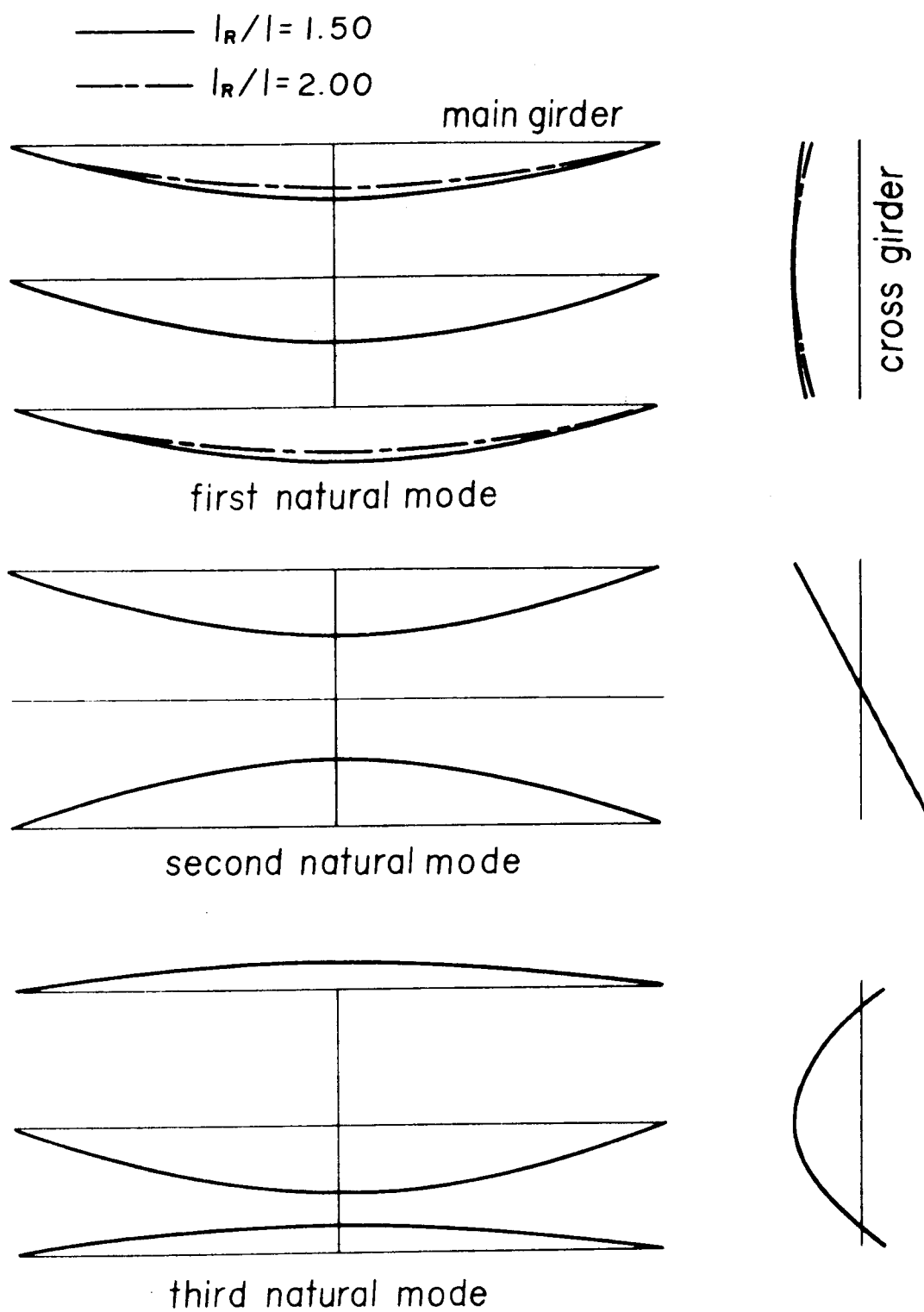


Fig. 3.4.4.2

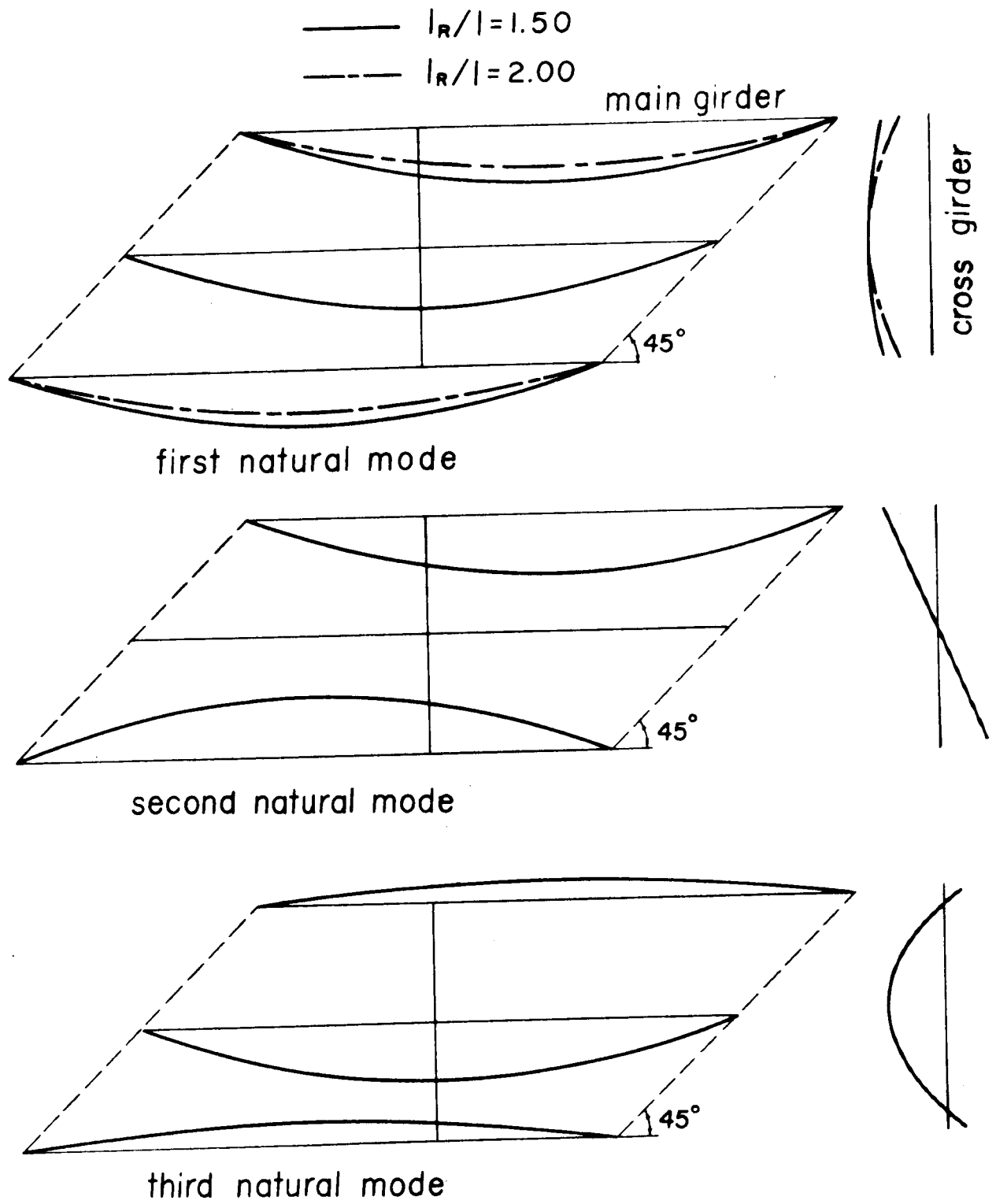


Fig.3.4.4.3



例として格子桁を取上げ、これの固有振動数・振動モードが変形等置法により解析できることも述べ、さらに簡単な格子桁について数値計算を行ない固有振動数と振動モードの変化を示したが以下のことが云えると思う。

### (i) 理論について

上述のように変形等置法により格子桁の動的解析を行おうとするときには、連続した一本の桁を単位構造物に選びこれについて荷重と変形との関係を求めこれをもとにして格子桁の基礎式を組み立てる方法をとる。この点、振動撓角法のようにはじめに梁を格点ごとに切断しその切断した梁ごとに関係式をたてこれより格子桁としての基礎式を導く方法とは根本的に異なるものである。このように連続した桁を単位構造物として取り扱えば簡単な考え方をもとにして式が誘導できるのは当然としても、これ以外に実用面において非常に有利な場合が生じることがある。それは振動撓角法のように一たん梁を切断してしまうと一格点について3つの未知数(せん断力と主桁・横桁の端モーメント)を取り扱う必要が生じるので、格点数 $n$ の格子桁ではその振動数方程式は $3n$ 次の行列式によってあらわされるけれども、連続した梁をもとにして式を導くと $n$ 次の行列式によって与えることがで

きる場合が生じるからである。桁の接し剛性を考慮する必要がある時には変形等置法によっても振動数方程式は $n$ 次の行列式となるので、この場合は振動撓角法と同じではあるが接し剛性の無視できるときには $n$ 次の行列式(式(3.4.2.14))となる。すなわち振動撓角法では桁の接し剛性も考慮しても考慮しなくても振動数方程式は $n$ 次の行列式に統一されるけれども変形等置法では桁の接し剛性も無視できる場合にはその行列式の次数を $1/3$ に減らすことができるわけである。このように行列式の次数を低減できると数値計算は比較にならぬ程容易にできることは云う迄もないが、実在構造物の中にはこの接し剛性の無視できるものが少くない。このようなわけで変形等置法は格子桁の解析には適用範囲の広い便利な解法であると言える。

もちろんこの方法は静的な問題に対してもそのまま適用できる。ただし桁が変断面の場合には本法は直接使用できないが、この種のものに対しては前もって主桁・横桁それぞれの固有振動数・振動モードを振動撓角法によって求めておけば、前述の変形等置法の解析過程がそのまま使用できるので格子桁としての基礎式は求められることになる。この場合 はじめに振動撓角法を用いるのではあるが、これは主桁横桁一本一本の梁に対して適用するものである

から、その基礎式は各梁に所属する格点数の2倍の未知数を含むものとなる。最初から格子桁に振動撓角法を直接使用すると未知数の数は全格点数の3倍となるけれども、上記のようにして振動撓角法を部分的に使用すると同時に多くの未知数を使用しないでよいので数値計算はかなり有利になるものと思われる。

なお振動撓角法以外にRitzのエネルギー法の使用も考えられるが、格子桁の場合主桁・横桁それぞれの境界条件・支持条件および主桁・横桁の結合点における変形の連続条件を同時に満足するような振動モードを直観的に考え出すことは一般には難しいので特別の場合を除いてRitzの方法も格子桁に適用するのは困難と考えられる。

ここでは固有振動数・振動モードを決定することのみについて述べたが、これらが決定できれば、種々の動荷重が作用するときのレスポンスは2.2に示した運動方程式を解いて求めることができる。

また、格子桁の格点も切り離したとき、静的に不安定な構造となるような桁（例えば格子桁橋の横桁）が生じるとき、数値計算はかなり厄介となるのでこの種の梁に対してはできるだけ質量を無視して荷重分配の役のみを受け持たせるような方法をとるのがよいと思う。実在橋梁では、合成桁の曲げ剛性はスラブの有効中も

考慮に入れて主桁・横桁に合成させるという方法がとられているが、この有効中の考え方にならって主桁・横桁にスラブの重量を分配すると重量の重複する部分が生じるのでこの配分の仕方は難しい問題と考えられる。この意味で主桁のみにスラブの重量を分配し、横桁にはそれを見捨てるという仮定は実用計算に便利と思われる。

#### (ii) 数値計算結果について

ここでは図-3.4.4.1に示す並列主桁3本・横桁1本の格子桁について、斜角と外桁の曲げ剛性を変化させた数例について数値計算を行なったが、それらの結果からつぎのことが云えると思う。

実在橋の場合  $I_R/I$  の値が2より大きくなることは殆んど考えられないから、この計算では  $I_R/I = 1.5$ , 2 の2つの場合について考えたが、直格子桁の最低次の固有振動数は、それぞれ中桁の固有振動数の1.163倍, 1.306倍となっている。単純梁の固有振動数は曲げ剛性  $EI$  の平方根に比例して大きくなるから、外桁単独の固有振動数を求めるとそれぞれ中桁の1.225倍, 1.414倍となる筈である。従って格子桁としての固有振動数は中桁の固有振動数の1~1.225, 1~1.414倍の範囲にあることは予想されるが、計算結果はどちらかというと外桁の固有振動数のほうに近い値となっている。これは、この格子桁では

外桁2本・中桁1本の構造のために外桁の影響を大きく受けたことによるものと考えられる。ゆえに、外桁・中桁の桁数の割合が異なる格子ではこの値は若干変化するものと思われる。

斜角が $\theta = 45^\circ$ に変化しても、固有振動数の変化は殆んど見られず、3次の振動次数までのものについては、 $\theta = 90^\circ$ の場合と比較してその影響は最大2%前後であり、この程度の斜角の変化は固有振動数に大した影響も与えないものと見られる。

また図-3.4.4.2, 図-3.4.4.3よりわかるように、格子桁の横桁方向の振動モードの中には、主桁単独では生じえない形状のモードが発生するが、これと同じ形状の振動モードが直交異方性板にも発生する(図-2.4.4.2のMode②)ことから、静荷重に対して格子理論と直交異方性板理論との間に存在する関連性の一端が、振動の場合にもうかがわれて興味ぶかい。

### 3.5 板と梁とよりできている構造物(防撓板)

#### 3.5.1 緒言

板と梁とよりできている構造物の一例として防撓板があげられる。平面構造物に荷重が作用するとき単独の平板に曲がり剛性を期待することは設計上できないので、これを梁で補強

する方法がとられることは周知の通りである。二の種の構造は土木・建築・造船・航空などの各分野にわたって広く使用されているため、これまで多くの研究が発表されているが、その大部分は静荷重に対するものであり振動問題を理論的に解析したものはきわめて少ないようである。

このような構造のものを最初から板と梁の基礎微分方程式をもとにして解こうとするならば、これら兩者の境界条件および変形の連続条件を同時に考慮して解を求めなければならないので、その解析はかなり困難なものになることが予想される。しかし、変形等置法によればはじめに板と梁との単位構造物に分解し、その独立した個々のものを対象にして式をたて最後にこれらを結合して系全体の基礎式を導くことができるので、単純な考え方をもとにして基礎式が誘導できる。もっとも本法によって解析できるものは単純な構造の限られた2,3のものだけであり、その境界条件が複雑なものあるいは梁が任意の方向に取り付けられているものに対しは、その解析は容易でない。

ここで取り扱う板は一様断面の直交異方性板とし、その基礎式は式(2.4.2.1)により与えられるものとする。また各梁の断面はそれぞれ異なっているとしてもよいが、その梁全体としては一

様とする。

### 3.5.2 四辺単純支持された防撓板

図-3.5.2.1に示すように、 $n$ 本の梁によって補強された直交異方性板について考える。まずこの梁と板とを別々に切り離し、独立した板と梁とに荷重を作用させて同じ変形を与えた後この両者を結合して系を組み立てることも考える。ただし、この場合この結合に使用する荷重には分布荷重を使用する必要がある。

四辺単純支持された直交異方性板に分布荷重  $p(x, y) \sin \omega t$  が作用するとき、そのレスポンスは式(2.4.2.28)

$$w = \sum_m \sum_{m'} w_{mm'} = \sum_m \sum_{m'} \left[ \Omega_{mm'} \Phi_{mm'}(x_i, y_i) \left\{ \int \Phi_{mm'}(x, y) p(x, y) dx dy \right\} \right] \sin \omega t \quad (3.5.2.1)$$

を使用して求められる。ここに

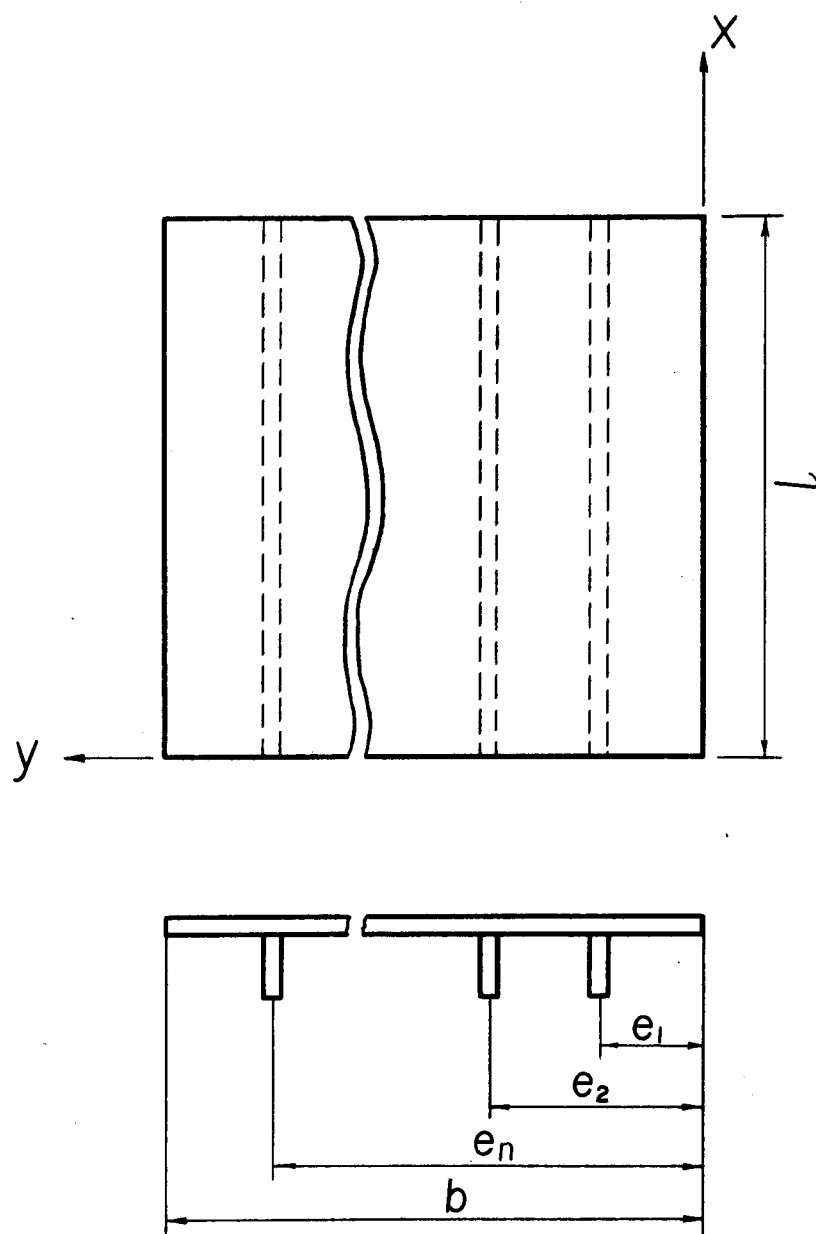
$$\Omega_{mm'} = 1/(\omega_{mm'}^2 - \omega^2), \quad \Phi_{mm'}(x, y) = \frac{2}{\sqrt{M}} \sin \frac{m\pi x}{l} \sin \frac{m'\pi y}{b}$$

$\omega_{mm'}$  :  $mm'$  次の固有振動数

$(x_i, y_i)$  : 測定点の座標

$M$  : 板の全質量

もと梁が取り付けられていた位置に

*Fig.3.5.2.1*



$$p_j \sin \frac{m\pi x}{\ell} \cdot \delta(y - e_j) \cdot \sin \omega t$$

$$(j = 1, 2, 3, \dots, n)$$

$\delta$  : デイラックの衝激係数

にて示される線荷重を作用させた時式(3.5.2.1)は次式となる。

$$W = \sum_m \sum_{m'} W_{mm'} = \sum_m \sum_{m'} \left[ \Omega_{mm'} \Phi_{mm'}(x_i, y_i) \left\{ \sum_{j=1}^n p_j \int \Phi_{mm'}(x, y=e_j) \cdot \sin \frac{m\pi x}{\ell} \cdot dx \right\} \right]$$

$$\sin \omega t = \frac{2\ell}{M} \left[ \sum_{m'} \Omega_{mm'} \sin \frac{m'\pi y_i}{b} \left\{ \sum_{j=1}^n p_j \sin \frac{m'\pi e_j}{b} \right\} \right] \cdot \sin \frac{m\pi x_i}{\ell} \cdot \sin \omega t$$

----- (3.5.2.2)

$$(j = 1, 2, \dots, n)$$

従って、荷重載荷位置における撓みは次式により与えられる。

すなわち

$$y = e_i, \quad (i = 1, 2, \dots, n) \text{ において}$$

$$W_i(x, e_i) = \frac{2\ell}{M} \left[ \sum_{m'} \Omega_{mm'} \cdot \sin \frac{m'\pi e_i}{b} \cdot \left\{ \sum_{j=1}^n p_j \sin \frac{m'\pi e_j}{b} \right\} \right]$$

$$\times \sin \frac{m\pi x}{\ell} \cdot \sin \omega t \quad \text{----- (3.5.2.3)}$$

次に梁について考える。  $j$ , ( $j = 1, 2, \dots, n$ ) 番目の梁 (今後簡単のために梁  $j$  と書くことにする) の固有振動数  $\omega_{gj,m}$ , ( $m$ : 振動次数) は式(3.5.2.4)にてあらはされる。

$$\omega_{gj,m} = \left( \frac{m\pi}{\ell} \right)^2 \sqrt{\frac{E_j I_j}{P_j}} \quad (3.5.2.4)$$

$E_j I_j$  : 梁  $j$  の曲げ剛性

$\rho_j$  : 梁  $j$  の単位長さあたりの質量

いま梁  $j$  に  $\rho_j \sin(m\pi x/\ell) \cdot \sin \omega t$  なる分布荷重を作用させたとき, この梁のレスポンスは式 (2.2.22) を使用して次式より求めることができる。

$$\begin{aligned} W_{gj}(x) &= \sum_m \left[ \Omega_{gjm} \Phi_{gjm}(x) \cdot \int \left\{ \Phi_{gjm}(x) \cdot \rho_j \sin \frac{m\pi x}{\ell} \right\} dx \right] \sin \omega t \\ &= \frac{\ell \rho_j}{M_j} \cdot \Omega_{gjm} \cdot \sin \frac{m\pi x}{\ell} \cdot \sin \omega t \quad \text{---- (3.5.2.5)} \end{aligned}$$

$$\text{ここに } \Omega_{gjm} = 1/(\omega_{gjm}^2 - \omega^2), \quad \Phi_{gjm}(x) = \sqrt{\frac{2}{M_j}} \sin \frac{n\pi x}{\ell}$$

式 (3.5.2.3), 式 (3.5.2.5) よりわかるように, 板と梁とに

$\sin(m\pi x/\ell)$  にて示される分布荷重の周期力を作用させた時, この両者は  $x$  軸方向に同一形状の撓み分布を生じるから, これらの板と梁とを重ね合して系を組み立てるためにはさらに撓みの大きさを等しくする必要がある。これは解析的には式 (3.5.2.3) と式 (3.5.2.5) とを等置することによって満足される。すなわち

$$\frac{2}{M} \left[ \sum_{m'} \Omega_{mm'} \sin \frac{m'\pi e_i}{b} \cdot \left\{ \sum_{j=1}^n \rho_j \sin \frac{m'\pi e_j}{b} \right\} \right] = \frac{\rho_j}{M_j} \cdot \frac{1}{\omega_{gjm}^2 - \omega^2}$$

( $j = 1, 2, \dots, n$ )

上式を書きかえると

$$\frac{M p_{gj}}{2 M_j (\omega_{gj}^2 - \omega^2)} = \sum_{j=1}^n \left\{ \sum_{m'} \frac{\sin\left(\frac{m'\pi e_i}{b}\right) \cdot \sin\left(\frac{m'\pi e_j}{b}\right)}{\omega_{mm'}^2 - \omega^2} \right\} p_j \quad (3.5.2.6)$$

このようにして組み立てられた系には

$$p_j + p_{gj} = p_{0j}, \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad (3.5.2.7)$$

にてあらはされる分布荷重が作用している。自由振動時には外力は零であるという条件より次式を得る。

$$p_j + p_{gj} = p_{0j} = 0$$

すなわち

$$p_j = -p_{gj} \quad (3.5.2.8)$$

式(3.5.2.8)の關係を式(3.5.2.6)に使用すると式(3.5.2.9)

となる

$$\begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} & \dots & \delta_{1n} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \dots & \dots & \delta_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & \dots & \dots & \delta_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{bmatrix} = 0 \quad (3.5.2.9)$$

ここに

$$\delta_{ij} = \sum_{m'} \left[ \frac{\sin\left(\frac{m'\pi e_i}{b}\right) \cdot \sin\left(\frac{m'\pi e_j}{b}\right)}{\omega_{mm'}^2 - \omega^2} \right]$$

$$\gamma_{jj} = \sum_{m'} \frac{\sin^2\left(\frac{m'\pi e_j}{b}\right)}{\omega_{mm'}^2 - \omega^2} + \frac{M}{2M_j(\omega_{jjm}^2 - \omega^2)}$$

$$(i, j = 1, 2, \dots, n)$$

すべてが零でない  $p_j$ , ( $j = 1, 2, \dots, n$ ) の値に対して上式が成立するためには係数行列が零になる必要がある。すなわち

$$\begin{vmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \cdots & \delta_{1n} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \cdots & \delta_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & \cdots & \delta_{nn} \end{vmatrix} = 0 \quad (3.5.2.10)$$

上式は振動数方程式にはかならない。またこれより求めた固有振動数  $\omega'_{mm'}$  の値を式(3.5.2.9)に代入すると  $p_i$  の比が決定できるので、この比を式(3.5.2.2)に用いると振動モード  $\varphi'_{mm'}(x, y)$  が決定できる。ただし  $\Omega_{mm'}$  の  $\omega$  にはいま求めた  $\omega'_{mm'}$  を使用する。

### 3.5.3 結 語

3.5 においては四辺単純支持された直交異方性板を梁で補強したものについて変形等置法の適用が可能であることを示した。この方法はこれまでに繰り返して使用してきたように単位構造物(この場合は直交異方性板と梁)

に同じ変形を与え、これらを組み合して与系をつくりその基礎式も導く方法である。従って本理論を使用するためには、各単位構造物を結合できるように同じ変形に調整できることが先決問題である。3.5.2に述べた例では、 $\sin(m\pi x/l)$ の関数にて示される分布荷重を与えることにより板と梁とに同じ変形を与えることができたので本法の使用ができるわけであるが、一般の場合には板と梁とに同じ変形を与えるような荷重を直観的に見つけることは非常に難しいと考えられる。このようなわけでこの解法はこの種の問題に対して実用面でかなりの使用制限を受けることになる。このほかに本法の使用できるものとしては、2.4.3に述べた相対2辺単純支持2辺自由なる直交異方性板(図-2.4.3.1)を梁で補強したものがあげられるが、この場合梁を板の自由辺方向に取り付けたときは解析可能であるけれども、これに直角方向に梁を取りつけたときは簡単にその解は求められない。この理由は上に述べたように、前者の場合正弦波関数で表わされる分布荷重を使用すると板と梁とに同じ変形を与えることができるが、後者の場合両者を結合する荷重が簡単な解析関数によって表わすことが難しいためである。

ここでは板と梁とを結合するとき分布荷重を使用した。この種の問題の場合これまでランガー桁・格子桁等に対して使用してきた等分布荷重・集中荷重を用いてこれらを結合することはできない。結合に使用する荷重は、構造物の種類によって適宜選択しなければならない。

弾性支承によって板が支持されているとき、集中荷重・モーメント荷重を使用すれば板の固有振動数・振動モードが求まる限りこの結合は可能である。このように単位構造物を直接接触させることは容易であるが、防撓板のように線結合を必要とするものは簡単に解析できないものが多い。

梁の数が多き場合には式(3.5.2.10)に示される振動数方程式の行列次数は高くなるので数値計算は厄介となろう。この場合には、3.3.8に述べたように梁をいくつかのブロックにわけ、ブロックごとに梁を板に結合する方法をとれば、同時に多くの未知数を取り扱うことなく解析できるので数値計算はかなり容易になろう。

## 結 論

構造物を合理的に設計するためにはその静的解析はもちろんのことその動的レスポンスを適確に把握する必要がある。一般に構造物は静荷重に対してはその解析は比較的容易であるけれども動荷重に対してはかなり困難となる場合が多い。とくに基礎微分方程式の直接解が得られるものはかなり限定される。すなわち単純な境界条件を持った一様断面の梁・板などについてはその解は比較的容易に求められるが複雑な構造物(これらの梁・板を支承・梁で補強したものまたはこれらと少し複雑に組み合せたものなど)になるとその解はかなり困難となる。これらはもっぱら次に述べる2つの近似解法に頼っているのが現状である。

### (i) *Ritz* のエネルギー法      (ii) 集中 *Mass* の方法

これらの方法はこれまで工学的に要求される問題の解決に大きく貢献したものであり、複雑な構造物の解析には必ずしもと云ってよいほど使用されてきたことは周知の通りである。この近似解法は便利な方法ではあるけれども、得られた結果の精度の吟味が難かしいこと、また精算値を得ようとすれば行列式の次数が高くなって、数値計算が非常に厄介になるなどの

弱点もいくつか含んでいる。この意味で、ここに提案した変形等置法は荷重と変形との関係より直接基礎式を誘導する方法であり、その適用範囲も上述の近似解法には及ばないとしてもかなりの種類の構造物に使用可能であり、しかも対象物によってはかなりの好結果が得られる点で上述の要求を或程度満足しているものと云えよう。工学的にはその実用面での簡易さがとくに要求されるので、従来の理論と比較してどの程度便利に使用できるかを明確にさせる必要がある。また本理論は従来の解析法とかなり異なった解析手順によるものであるので、この理論の正しいことを証明する必要もある。ここでは種々の構造物に変形等置法を使用して基礎式を誘導し、簡単な問題に対して数値計算を行ない、これらを従来の理論より得られたものと比較した結果、理論の正しいこと実用面での有利さなどを具体的に示す有意義な資料を得ることができた。つぎに本研究の概要とその注目すべき若干の成果を掲げればつぎのようである。

第1篇においては総論として従来振動解析に使用されてきた各種理論の概観と変形等置法の解析原理についてふれ、これらの特長・適用範囲などについて論じた。



1.1章においてはこれまで構造物の動的解析に用いられてきた主な方法すなわち (i) 微分方程式の直接解を求める方法 (ii) エネルギーの原理にもとづく Rayleigh または Ritz の方法 (iii) 集中 Mass の方法について概説した。まず 1.1.1 節において微分方程式より厳密解の求められるものは簡単な支持条件を持った梁・板であり、一般の構造物に対してはその解を求めることは非常に困難であることを述べた。1.1.2 節においてはエネルギー法による動的解法について述べ、その基礎式とその適用範囲を示し、この方法が非常に広範囲のものに適用でき、応用面のひろいものではあるけれども反面最初にモードを直観的に仮定できることを前提条件とした解析法であるため、境界条件・支持条件によってはこのモードの仮定が難しい場合もあること、精算値を得ようとするれば振動数方程式の行列式の次数が増加するため数値計算が厄介になること、得られた結果の精度を吟味することが困難であることなどを指摘した。1.1.3 節においては集中 Mass の方法についてふれ、この方法は静力学的に解析可能である限りその基礎式の誘導は可能ではあるが質量を集中させた各点すべての撓みの影響係数を計算

する必要があること、振動数方程式を解くためには電子計算機を必要とすること、集中させる Mass の数は直観的に決定する必要があること、計算精度の吟味を容易に行うことができないことなどを述べた。

1.2 章においては変形等置法の解析原理を示し、さらにその特長・適用範囲について述べた。まず 1.2.1 節において梁をトラスで補強した簡単な例題をもとにして変形等置法の解析手法を示した。ここに提案した変形等置法は最初から構造物を一体と考えて式を誘導するのではなく、はじめに構造物をいくつかの適当な単位構造物に分解し、これらのおのおのについて荷重（力とモーメント）と変形（撓みと撓み角）との関係を求めたのち、これらを組み合わせて元の構造物の基礎式を導く方法である。この点従来の基礎式の誘導法とは根本的に異なっているものと云える。このような解析法をとることによって変形等置法の解析理論が簡明になり、また適用範囲も拡大されたわけである。

1.2.2 節においては変形等置法の特長について述べた。本法の特長の一つとして適用範囲の広いことがあげられるが、これについては 1.2.3 節にゆずりこの節では基礎式の誘

導と実用面における簡易性についてのみ考察した。その結果以下のことが明らかとなった。

- (i) 変形等置法における基礎式の誘導法は、各単位構造物ごとに周期荷重（外力とモーメント荷重）と変形（撓みと撓み角）との関係を求め、それらの関係式を等置することによって系全体の基礎式を導くので、各単位構造物の荷重と変形の関係が与えられる限り基礎式の誘導は可能である。（ただし、単位構造物同志を点において結合する時は問題ないが、板と梁とを結合する例に見られたように線結合を必要とするものはこの結合を容易に行うことができないものもある。）このとき作用させる周期荷重は集中荷重・分布荷重・モーメント荷重のうち必要なものを適宜選択して使用するわけであるが、このような荷重を使用して単位構造物を機械的に組み合せて基礎式を誘導する解析法は他にないようである。また質量の無視できる構造物に対して上記の方法を用いれば不静定構造物の静的解析が行えることになる。最初に各単位構造物ごとに求めた荷重と変形との関係が解析過程に近似を行うことなく求められたものであればこれらを組み合してできる基礎式より得られた結果は精算値となる。このように基礎式の

誘導が直視的である点 また各単位構造物の荷重と変形との関係より直接基礎式の誘導が可能である点は従来の解析法と比較して異なったものと云える。

(ii) 変形等置法では振動数方程式の行列式の次数は単位構造物を結合させるに使用した荷重の数によってきまる。数値計算の難易はまず行列式の次数の大小によって支配されるものと考えてよいから、単位構造物を結合させるには使用する荷重はできるだけ少なくするのが望ましい。単位構造物に分解する仕方は自由ではあるが、数値計算を容易に行うためには不必要な切断は慎むべきである。とくに梁などのように曲げ剛性を持つ部材では一たん切断してしまうとそれを結合するには2つの外力(せん断力と曲げモーメント)も必要とするから、切断しなくてすむような構造(例えば変位支承・換り剛性の無視できる格子桁など)の時には、これを切断することなく連続したものを単位構造物に選ぶと結合するに要する荷重は一つですむので行列式の次数を半減することができるわけである。振動撓角法などのように必ず各スパンごとに切断しなければならないような解析方法と比較するとき本法の有利さは自ら理解できよう。もっとも変断面構造のも

のに対しては切断した各スパンごとの梁に対して振動撓角法を用いなければならない。

(iii) エネルギー法・集中 Mass の方法では精算値を得ようとすれば振動数方程式の行列式の次数は増加するが、変形等置法によると振動数方程式の行列式の元素は無限級数の和によって与えられているので、その項数を増加させることによって計算精度をあげることができるわけで、行列式の次数と計算精度とは一応無関係となっているため結合点の少ない構造物に対して本理論は非常に有利となることがわかる。

(iv) 結合点の多い構造物に対して変形等置法をそのまま使用すれば行列式の次数は高くなるけれども、この結合は必ずしも同時に行わなくてもよい理由から結合容易なものをいくつかまとめて順次結合を繰り返してゆけば少ない未知数を取り扱いながら計算することができ数値計算はかなり容易となろう。また数値計算の労力を省くためには、このほかにはじめに構造物全体を適当なブロックに分割し、そのおのこのブロックについて上述の結合を行ない最後にこのブロックを結合する方法あるいは結合点を粗に選んで近似値を求める

方法 またはこの近似値を密に結合したもとの振動数方程式中に使用することにより比較的容易に精算値を得る方法などが考えられる。

(V) この種の固有値問題は試算によって求めるのが便利であるが、適当な $\omega$ の値を代入することによって振動次数とは無関係にいくらでも高次の固有振動数を求めることができる。さらにこのようにして得られた固有振動数 $\omega_m$ の値を用いれば結合点に作用させた荷重相互の比が決定できるので振動モード $\varphi_m(x)$ は容易に決定できる。もちろんこの場合においても結合点に作用させる荷重が少なくてすむような構造物に対しては、これら荷重相互の比がとくに簡単に計算できる。

(VI) 変形等置法は解析過程に近似を行うことなく基礎式を誘導することが可能であるが、この基礎式は無限級数の項を含むので得られた結果は近似値となる。しかし、その級数の収束性については検討できるのでどの程度の精算値が期待できるかの吟味は可能である。エネルギー法・集中Massの方法ではこの検討は簡単にできないので、この誤差の吟味が容易なことは変形等置法の特長のひとつと云える。

1.2.3 節においては変形等置法の適用範囲について述べた。変形等置法では単位構造物ごとの荷重と変形との関係式をもとにして基礎式を誘導するので、これらの関係式が与えられていることが先決問題である。いま単位構造物のうち質量の無視できるものを静的構造物、無視できないものを動的構造物と呼んで区別をつけるとき、動的構造物同士を組み合わせることができるものは当然動的構造物となるが、動的構造物と静的構造物とを組み合わせることができるものもやはり動的構造物に含まれるので、本法の使用できる対象物は飛躍的に増加する。すなわち、動的レスポンスの解析解が容易に与えられるものは単純な支持条件をもつ一様断面の梁と板の二種類であるけれども、静的構造物の荷重と変形との関係は静力学的に求められるものが多いので（例えば弾性支承・中間支承・アーチ・トラスなど）これらの組み合わせによってできる構造物はすべて変形等置法が適用できることになる。変断面構造の動的構造物に対しては荷重と変形との関係は容易に求められないが、梁に対しては振動撓角法などを使用し、前もって固有振動数と振動モードを求めることができるので本法の適用は可能となる。もちろんこの場合本法を使用

するまでにかなりの準備計算を必要とすることになる。

第2篇においては単位構造物の基礎方程式について述べた。変形等置法では各単位構造物についてたてた荷重と変形との関係式をもとにするが、静的構造物に対するものは静力学的に解析できるのでここでは種々の動的外力が作用するときのレスポンスを求める基礎式を誘導することを主な目的とした。まず2.2章においてLagrangeの運動方程式を用いて構造物に動的外力が作用するときの一般式を誘導し、その構造物の固有振動数と振動モードが決定できれば集中荷重・分布荷重・モーメント荷重・移動荷重などすべての動的外力に対する運動方程式が直ちに立てられることを示した。動的モーメント荷重が作用するときそのレスポンスを求めることは比較的困難なものと考えられるが、モーメント荷重を偶力に置き換え(図-2.2.4(b)参照)これに集中荷重に対する基礎式を使用してその運動方程式を容易に誘導することができた。この運動方程式は固有振動数と振動モードおよびその一次微分が求まれば直ちに決定できるので、モーメント荷重に対する基礎式はあらためて求める必要はない。すなわち、この3者が決定できれば上に示したすべての動荷重に対する運動方



程式は自動的に誘導されることになる。モーメント荷重に対するレスポンスを求めることができたことは、曲げモーメントに対して抵抗を持つ単位構造物（例えば梁・板・回転支承など）同士の結合を可能とし、これにより変形等置法の適用範囲が大きく拡張された。なお動荷重に対する変形の運動方程式はともに常数を係数とする2階の微分方程式により与えられ、右辺は振動モードとその一次微分とにより同一形式で整然と表現されているので、第3篇において示した変形等置法の解析過程は簡潔に表現することができた。

移動荷重が作用するときの基礎式は、これまで荷重と構造物との2つの系に直接Lagrangeの運動方程式を適用して誘導する方法がとられてきたが、このようにLagrangeの運動方程式を適用すると荷重が複雑な振動系のものであったりクーロン摩擦のような非線型要素を含むような場合その基礎式の誘導はかなり困難になるものと思われる。これをここに示したように、始めに構造物の等価モデルをつくり、この上に荷重の振動系を結合したものに置き換えて考えれば、移動荷重の問題は多自由度の連成振動の問題として解析できるので、曲げ部材に対しても何ら考慮することなくたんに鉛直方向の

力と変位のみを考えて運動方程式が誘導できる。ここに示したような力学モデルを考えることは式の誘導が簡明になる以外に振動系全体の力の伝達・分配の状態をはっきり意識するのに役立つものである。

2.3章においては種々の境界条件を持つ等断面梁の固有振動数と振動モードを求める基礎式を示し、つぎに単純梁に種々の動荷重が作用するときのレスポンスを求める運動方程式を誘導し、最後に振動撓角法の基礎式を示した。また等価モデルを使用して諸種の移動荷重が作用するときの基礎式を導き、この特別な場合が Lowan, Timoshenko, 国井博士が誘導した運動方程式と一致することを確認めた。さらに移動荷重の速度変化の影響が実在橋に対してどの程度の影響を与えるものであるかを定量的に調べるために数値計算を行ない、荷重の速度が変化すると一定速度のときと比べて10～15%程度撓みが増加するけれども、その大きさは初速度と加速度との相対関係によって決定することを明らかにした。

2.4章においては四辺単純支持された直交異方性板および相対2辺単純支持2辺自由なる直交異方性板の振動数

方程式と振動モードを求める基礎式を誘導した後、種々の動荷重が作用するときの運動方程式は固有振動数と振動モードを使用して系統的にあらわされることを示し、最後に実橋について行なった数値計算結果について述べた。2.4.2節においては四辺単純支持された直交異方性板の固有振動数と振動モードを決定し、これに集中荷重・分布荷重・移動荷重・モーメント荷重が作用するときの運動方程式を示した。2.4.3節においては相対2辺単純支持他の2辺自由なる直交異方性板について振動数方程式と振動モードを求める基礎式を誘導し、これに動荷重が作用するときの運動方程式は四辺単純支持された直交異方性板について求めたものと全く同じ型の微分方程式で与えられることを述べた。2.4.4節においては巾員の大きい橋を直交異方性板とみなし、この上を一定荷重が一定速度で走行する場合について数値計算を行ない巾員とスパンとの比、荷重の走行位置、測定点の選び方により動的レスポンスは大きく劣化することを明らかにした。

第3篇においては、第2篇において求めた梁・直交異方性板の動荷重に対する基礎式を使用して、動的構造物同志またはこれらと静的構造物とを組み合わせることができる種々の動的

構造物に変形等置法を適用して基礎方程式が容易に決定できることを示し、従来の解析法との比較を行い、さらにこの中の二・三のものについては実測値と理論値とについても検討した。なお、上述の組み合わせによりできる構造物はかなり多種類のものになるので、ここでは単純梁をアーチで補強したランガー桁を代表例としてとりあげ本法により求めた固有振動数と振動モードの精度・実験値との比較あるいは移動荷重が作用するときの動的レスポンスなどについて詳細に検討し、他のものについては基礎式を誘導する程度に止めた。

3.2章においては変形等置法により梁とアーチ(または索)とよりなる構造物の動的解析が容易にできることを示した。梁とアーチ(または索)とよりできている実在構造物としてはランガー桁・ローゼ桁・吊橋の三種のものがあげられるが、もともとこれらはいずれも梁を放物線状の軸力材で補強するという意味では全く共通した構造のものであるから同一理論のもとに解析できる性質のものである。しかしこれまで行われてきた研究ではこれら相互間に何ら関連を持たせることなくそれぞれ独自の立場より理論を発展させてきたのが現状のようである。このようなわけでここではランガー桁を代表例とし

て取り上げ<sup>2</sup>の基礎式を変形等置法により求め、これがローゼン・吊橋の基礎式として容易に兼用できることを示した。

3.2.2節においてはランガー桁の適合条件式について述べた。ここに示した適合条件式は、静力学的な方法すなわち仮想仕事法でランガー桁を解く場合には用いない条件式である。3.2.8節の数値計算結果からわかるようにこの条件を使って立てた動的解と静的解とが全く一致するのであるからこの適合条件式の正しいことは立証できたと思う。またこの適合条件式より、アーチは対称振動時のみに作用し逆対称振動時には全く作用せずこの時補剛桁のみの振動となることがわかったので、固有振動数と振動モードをこの2つのグループに分けて別々に求めることができた。このため解析・数値計算ともに非常に容易となった。3.2.3節においては変形等置法によりランガー桁の振動数方程式と振動モードを求める基礎式を誘導した。これらの基礎式はいずれも級数収束として直接与えられているので、エネルギー法・集中 Mass 法の場合必要となる行列式と同次連立方程式の計算は全く不用であり、計算精度はその級数の収束性を検討することにより簡単に吟味できることが明らかとなった。3.2.4節においては前節におい

て求めた固有振動数と振動モードを使用して集中荷重・移動荷重・周期力などの動的外力が作用するときの運動方程式を示し、さらにこれらの動荷重が作用するときの補剛桁曲げモーメントも撓み曲線の2階微分として容易に表現できることを述べた。3.2.5節においては後の数値計算においてこの変形等置法の理論が正しいかどうかを検討するために、動的レスポンスの特別な場合として静荷重をうけるランガー桁の撓みと曲げモーメントの影響線の解をこの動的解析より求めた。本法による基礎式は従来のもとはかなり異った形で与えられているので、理論の正しいことを証明するためにはエネルギー法により得られた結果と比較するのの一法ではあるが、このエネルギー法は近似解法であるため精度の吟味を充分行うことができない。このためここでは動的解析の特別な場合として求めた静的解と、従来行われてきた静力学的解析結果とを比較する方法をとったわけである。従来理論の正しいことを示すためには、固有振動数について理論値と実験値との比較を行うことがよくとられているが、このような方法により理論の妥当なことを証明するのは困難な場合が多いように思われる。その理由は実在構造物は理論的に考えているものより剛にできているもの

があり、また解析時に使用した仮定に合致した構造であるかどうか疑わしいものがあるためである。この意味でここに示したように同じ仮定のもとに解いた2つの理論値同士を比較する方法は、上記のような理論以外の要素が入る余地が全くないので理論の証明あるいは誤差の検討も正確に示す有効な手段と思われる。

3.2.6節においてはランガー桁上を一定荷重が一定速度で走行するとき任意点における撓みのレスポンスを求める運動方程式を誘導した。ここでは動的増加率の影響を検討し易くするため動的増加成分と静的成分との2つの成分に分けてあらわした。

2.2に述べた基礎式を使用すれば荷重の速度が変化する場合または複雑な振動系が移動する場合についても運動方程式は容易に得られる。3.2.7節においてはアーチを補剛桁端部で偏心結合したランガー桁についても変形等置法の使用により振動数方程式と振動モードが容易に決定できることを示した。

3.2.8節においてはスパンの異なる2つのランガー桁橋、宇崎橋( $l=139.2m$ )、子飼橋( $l=57.2m$ )について数値計算を行ない、本法により求めたこれらの橋の固有振動数と振動モードの精度・実験値との比較あるいは移動荷重が作用するときの動的レスポンスなどについて述べた。動的解析より求めた静的撓みと曲げモ

ーメントの影響係数は仮想仕事法により求めたものと全く一致した。撓みの計算には固有振動数と振動モードを使用しているが、固有振動数の計算には適合条件式を用いているので数値計算によりこれら3者の検討を同時に行うことができたわけである。また両橋の場合とも固有振動数 $\omega_n$ の理論値と実測値との比は約90%、静的載荷試験における撓み比はほぼ80%であった。撓みは $\omega_n^2$ に逆比例するので(式(3.2.5.2)と式(3.2.5.4)参照)、これらの値は妥当なものであることがわかる。荷重が移動するときヤ崎橋の $l/4$ 点の動的撓みは速度10, 20, 30 m/sec のとき動的増加率がそれぞれ11%, 24%, 43%となった。とくに逆対稱一次の振動が $l/4$ 点では顕著に現われ、動的増加率の大部分がこの振動によってしめられているが、スパンが長大になるとこの傾向はますます増大するので、この種の振動モードの発生防止は今後の研究課題とならう。

3.2.9節においては変形等置法によるローゼ桁・吊橋の解析にふれたが、これらはいずれも本法により容易に解析され得るものであり、しかもローゼ桁の場合には補剛桁の断面2次モーメントを吊橋の場合には束の断面積をそれぞれ換算すればラングー桁についてたてた基礎式をそのまま使用して固有振動数と振



動モードを決定できることが明らかとなった。ローゼ桁の場合には上弦材の断面2次モーメントを補剛桁の断面2次モーメントに近似的にくり入れて解析するが、数値計算によりその誤差は数%程度のものであることも確かめた。吊橋の場合には背控ケーブルも等価なランガー桁の補剛桁断面積に置き換えているのでランガー桁橋に対して求められたものと同程度の精算値が期待できる。線型化した撓度理論により吊橋の動的解析を行う時には、死荷重による索の軸力を補剛桁に移行して考えれば、たんに単純梁の固有振動数を補正するだけでランガー桁について求めた基礎式がそのまま使用できることを明らかにした。

3.3章においては弾性支承上の連続梁の固有振動数と振動モードは変形等置法により解析できることを示した。3.3.2節においては変形等置法を適用する準備段階として、梁に周期力(集中荷重とモーメント荷重)が作用する時の変形(撓みと撓み角)のレスポンスを求める基礎式をマトリックスを用いてあらわした。3.3.4節と3.3.5節においては、変位支承(変位に比例した抵抗を持つ支承)または回転支承(回転に比例した抵抗を持つ支承)を持つ連続梁に変形等置法を適用することについて述べた。この両者について示した解析手法は全く同じであり、途中で

梁を切断することなく連続した梁に直接支承を結合して基礎式を導いている。従来この種の問題の解析には振動撓角法が使用されているが、この方法は連続した一本の梁を各支承ごとに切断し、その切断した梁の両端と支承とを結合する方法をとっている。これに反し変形等置法では梁を切断することなく連続した梁に直接支承を結合することができるので数値計算が非常に有利になる。すなわち梁を一たん切断してしまうと切断点ごとに2つの未知数が生じるため弾性支承数が $n$ の連続梁のときにはその振動数方程式は $2n$ 次の行列式となる。これに対し変形等置法による $n$ 次の行列式により与えることができるので従来の方法と比べて行列式の次数を $1/2$ にすることができるわけである。3.3.6節においては変位回転支承(変位と回転とに比例した抵抗を持つ支承)を持つ連続梁について2つの解析法を示した。すなわち第1法は変位支承または回転支承に対して用いたと同じ手法により、連続梁に変位回転支承を直接結合することにより基礎式を誘導する方法であり、第2法は連続梁にまず変位支承の条件を満足させ、次に回転支承の条件を満足させるようにして基礎式を導く方法である。このように弾性支承が変位と回転の2つの抵抗要素を含む場合、この両者を同時に考えて基礎式を導くと振動

数方程式は $2n$ 次の行列式となるけれども、変位と回転の条件を逐次満足させていく解析法をとると $n$ 次の行列式 $2\pi$ に分解されるわけである。3.3.7節においては固定端を有する連続梁が弾性支承を有する場合について変形等置法を適用した。この場合固定端を持つ連続梁に弾性支承を結合しても基礎式の誘導は可能であるが、ここでは最初固定端を単純支持点に置き換えた連続梁を考え、この梁に前節までに述べた解析手法により弾性支承を結合した後最後に固定端に端モーメントを作用させ、これに固定端の条件すなわち撓み角零の条件を使用して基礎式を誘導する方法を示した。例として一端固定他端単純支持された梁について数値計算を行い、上述の解析より得られた結果が梁の微分方程式を直接解いて求めた結果と一致することを確かめた。3.3.8節においては多くの支承を持つ連続梁について述べた。梁が多くの支承によって支持されているとき、その条件を同時に満足させるようにして振動数方程式をたてると行列式の次数が増加して数値計算が非常にはん雑になる。これをさける方法として、3.3.6節第2法に述べたように変位と回転の条件を順次導入していく方法も数値計算を容易にする一方法であるが、この節でははじめに与系をいくつかのブ

ックに分割し、各ブロックごとに梁と支承とを結合した後最後に各ブロックの両端を結合して元の振動系を組み立てることにより基礎式を導く方法を提案した。この方法によると支承数が多い場合でも同時に多くの未知数を取り扱うことなく数値計算ができるので有利とならう。また梁に結合する支承の順序は任意に変更できるので異なった種類の支承を有する梁に対しては同種の支承をグループにまとめ、これをグループごとに順次結合すれば便利と思われる。

梁がスパンごとに断面が異なる時、変形等置法はそのまま使用できない。この場合従来の解析理論による必要があるため、本法はこの面では大きな制限をうけている。

3.4章においては梁と梁とよりなる構造物として格子桁を取りあげ、これに変形等置法を適用して基礎式を誘導し桁の接し剛性の無視できるものに対して本法は有利な解法となることを述べ、簡単な直交格子桁に対して数値計算を行ない、外桁・中桁の曲げ剛性の相違・斜角の変化などにより固有振動数と振動モードがどのように変化するかを示した。まず3.4.2節において、主桁と横桁とを単位構造物とし、これらのおののに対して荷重と変形の関係式が与えられれば与系の固有振動

数・振動モードを決定する基礎式は直ちに誘導できることを明らかにした。3.4.3節では、前節に述べた解析理論が種々の格子桁に適用できることを述べた。すなわちここに示した解析法は主桁・横桁の配置および支持条件はどのようなであってもよいし、主桁・横桁の直交・斜交のいずれをも内包はない。ただ格点の座標だけが尚題となるものである。また桁の接し剛性を考慮した格子桁に対しても同様な解析法により基礎式の誘導が可能であることを述べた。格子構造に対して振動撓角法を使用すると一格点に対して3つの未知数(せん断力と主桁・横桁の端モーメント)を必要とするので $n$ つの格点を持つ場合振動数方程式は $3n$ 次の行列式によりあらわされるが、本法によると桁の接し剛性を無視できる場合 $n$ 次の行列式で振動数方程式をあらはすことができた。つまり振動撓角法では桁の接し剛性を無視できる場合においても無視できない場合においても振動数方程式は $3n$ 次の行列式に統一されるけれども本法では桁の接し剛性を無視できる場合に限ってその行列式の次数を $1/3$ に低減できるわけである。実在構造物は周知のように桁の接し剛性の無視できるものが少なくないので本法は格子構造に対して適用範囲の広い解

法となるものと思われる。ただし、桁の断面が節点ごとに変化する場合変形等置法は直接適用できないけれども、前もって主桁・横桁それぞれの固有振動数と振動モードも振動撓角法によって求めておけば、各桁について荷重と変形との関係は与えられるので本法の使用は可能となる。

3.4.4 節においては主桁3本・横桁1本の直交格子桁について数値計算を行ない、斜角と外桁の曲げ剛性を変化させた場合の固有振動数と振動モードの変化をしらべた。実橋の場合外桁と中桁の曲げ剛性の比  $I_R/I$  の値は2より大きくなることは考えられないのでここでは  $I_R/I = 1.5; 2$  の2つの場合について考えた。この時最低時の固有振動数はそれぞれ中桁の固有振動数の1.163倍、1.306倍となった。単純梁の固有振動数は曲げ剛性の平方根に比例するから、外桁単独の固有振動数はそれぞれ1.225倍、1.414倍となるはずである。したがって格子桁としての固有振動数は中桁の固有振動数の1~1.225倍、1~1.414倍の範囲内にあることは予想されるが計算結果はどちらかという外桁の固有振動数に近い値となった。これはこの格子桁が外桁2本・中桁1本の構造のものであるから外桁の影響を大きく受けたものと考えられる。斜

角 $\theta$ が $45^\circ$ に変化しても固有振動数の変化はほとんど見られず、3次の振動次数までのものについては $\theta = 90^\circ$ の場合と比較してその影響は最大2%前後であった。この程度の斜角の変化は固有振動数に大きな影響を与えないものと思われる。

3.5章においては変形等置法により板を梁で補強した構造物(防撓板)が解析できることを示した。3.5.2節では四辺単純支持した直交異方性板を梁で補強したものを例にとり、直交異方性板と梁とを単位構造物として与系の基礎式を誘導した。この種の構造物のうち解析可能なものはごく限られたものであり、上述の例題以外に本法の適用可能と考えられるものには相対2辺単純支持2辺自由なる直交異方性板があげられる。この場合梁を自由辺方向に取り付けたものは解析可能であるけれどもこれに直角方向に取り付けたものは簡単に解析できない。この種の構造で変形等置法が適用できるものは上述の2つの場合に限られるようである。

第3篇では各種構造物の動的解を求める変形等置法の適用を具体的に示し、ランガー桁を代表例としてこの理論の正しいことを数値計算・実験により示したが、これ以外に本法の使用により有利に解析できるものもいくつかあげら

れよう。

最後に本研究を行うに当り、終始懇切な御指導を賜わった京都大学小西教授、名古屋大学成岡教授ならびに熊本大学吉村教授に厚く感謝の意を表す次第である。また本  
10 研究中、つねに御援助・御協力いただいた熊本大学応用力  
学教室の方々に心からの感謝を捧げ御礼申し上げる次第で  
ある。



## 第 1 篇 参考文献

- 1) Bisplinghoff ; Aeroelasticity , Addison Wesley , p.67, 1955.
- 2) Timoshenko, S ; Vibration Problems in Engineering , Van Nostrand , p.370 , 1937.
- 3) Bleich, F. ; Mathematical Theory of Vibration in Suspension Bridge , United States Government Printing Office , Washington , p.78 , 1950.
- 4) 松平 ; 基礎振動学 , 共立出版 , p.236 , 昭.25
- 5) Ritz , W. ; Theorie der Transversalschwingungen einer Quadratischen Platten mit Freien Randern , Annalen der Physik , Bd. 28 , p.737 , 1909.
- 6) Young, D. ; Vibration of Rectangular Plates by the Ritz Method ; J. Appl. Mech. , Dec. , 1950 , p.448
- 7) Hearmon, R. F. S. ; The Frequency of Flexural Vibration of Rectangular Orthotropic Plates with Clamped or Supported Edges , J. Appl. Mech. , vol. 26 , Dec. , 1959 , p.537.
- 8) Jacobsen and Ayre ; Engineering Vibrations , McGraw

Hill, p.363, 1958.

9) 建築学大系, 19卷, p.145, 彰国社, 1957.

10) Fleming, Romualdi ; Dynamic Response of Highway Bridges, Proc. ASCE, vol. 87, ST.7, Oct., 1961

11) Timoshenko and Young ; Engineering Mechanics, McGr. Hill.

12) Hartog ; Mechanical Vibrations, McGraw Hill, 1947.

13) Burton ; Vibration and Impact, Addison Wesley, 1958.

14) Harris and Crede ; Shock and Vibration Handbook, vol. I, II, III, McGraw Hill, 1961.

15) Bishop, R.E.D. and Johnson, D.C. ; The Mechanics of Vibration, Cambridge, 1960.

16) 妹沢 ; 振動学, 上.下卷, 岩波, 昭.24.

17) 坪井 ; 振動論, 河出, 昭.18.

## 第2篇 参考文献

- 1) Inglis ; Oscillations in a Bridge Caused by the Passage of a Locomotive, Proc. Roy. Soc. London, vol. 118, 1928
- 2) Lowan ; On the Transverse Oscillations of Beams under the Action of Moving Variable Loads, Phil. Mag., vol. 19, 1935, p. 708.
- 3) Schallenkampf, A. ; Schwingungen von Trägern bei Bewegten Lasten, Ing. Arch., Bd. 8, 1937, S. 182
- 4) Ayre, R.S. and George Ford, L.S. Jacobsen ; Transverse Vibration of a Two-Span Beam under Action of a Moving Constant Force, J. Appl. Mech., 1950, p. 1.
- 5) 生井 ; 動荷重による梁の振動, 機械学会論文集, 19巻, 昭. 28, p. 123.
- 6) Bishop, Johnson ; Vibration Analysis Tables, Cambridge Univ. Press, 1957.
- 7) Biggs and Suer ; The Vibration of Simple Span Highway Bridges, Proc. A.S.C.E., vol. 83, ST2, 1957
- 8) Wright and Green ; Highway Bridge Vibrations Part I,

Report No. 4, Queen's Univ., Dec., 1959

- 9) Huang and A.S. Veletsos ; Dynamic Response of Three Span Continuous Highway Bridges, Univ. of Illinois, Civil Eng. Studies, Structural Research Series, No. 190, Sep., 1960.
- 10) Wen, R. K. ; Dynamic Response of Beams Traversed by Two-Axle Loads, Proc. ASCE, Oct., 1960.
- 11) Tomotika ; The Transverse Vibration of a Square Plate Clamped at Four Edges, Phil. Mag., vol. 21, 1936, p. 745
- 12) 喜内 ; 梁及び矩形板の撓み振動の理論, 土木学会論文集, No. 5, 昭. 25, p. 127.
- 13) Iguchi ; Die Biegungsschwingungen der Vierseitig Eingegpannten Rechteckigen Platte, Ing. Arch., Bd. 8, 1937, S. 11.
- 14) Iguchi ; Die Erzwungenen Schwingungen der Rechteckigen Platte, Ing. Arch., Bd. 11, 1940, S. 53.
- 15) 井口 ; 相対 2 辺が単純支持他の 2 辺が自由なる矩形板の振動について, 土木学会誌, 昭. 15, No. 4, 1940.
- 16) 成岡 ; 四辺固定正方形の固有振動数の計算, 土木学会誌 昭. 22, 23 臨時増刊, 1947, p. 154.
- 17) Hearmon ; The Frequency of Vibration of Rectangular

Isotropic Plates, J. Appl. Mech., vol. 19, 1952, p. 402.

- 18) Iguchi ; Die Eigenschwingungen und Klangfiguren der Vierseitig Freien Rechteckigen Platte, Ing. Arch., Bd. 21, 1953, S. 303.
- 19) Eringen, A.C. : Transverse Impact on Beams and Plates, J. Appl. Mech., Dec., 1953, P. 461.
- 20) 米沢 ; 直交異方性板理論の桁橋構造への適用に関する実験的研究, 土木学会誌, 39巻, No. 10, p. 31, 1954.
- 21) Erington ; Response of Beams and Plates to Random Loads, J. Appl. Mech., vol. 24, No. 1, 1957, P. 46.
- 22) Yonezawa and Naruoka ; A Study on the Period of the Free Lateral Vibration of the Beam Bridge by the Theory of the Orthotropic Plate, Ing. Arch., Bd. 26, 1 Ht., 1958, S. 20.
- 23) 平井 ; 種々の移動荷重をうけるはり構造の基礎方程式とその応用, 土木学会論文集, No. 90, p. 29, 昭. 38.
- 24) 平井 ; 移動荷重をうける相対2辺単純支持, 他の2辺自由なる直交異方性板の振動性状について, 土木学会論文集, No. 92, 昭. 38.
- 25) 前出, 第1篇 9), p. 167.
- 26) 前出, 第1篇 2), p. 352

27) 三瀬, 国井 ; 走行荷重による橋桁の強制振動論, 九大工. 紀  
要, 昭. 18. 3.

## 第3篇 参考文献

- 1) Klöppel u. Lie ; Lotrechte Schwingungen von Hängebrücken,  
Ing. Arch., Bd. 13, 1942, S. 211.
- 2) 安部 ; ランガー橋の振動に関する研究, 土木学会論文集,  
No. 14, 昭. 27, p. 37.
- 3) Steinman, D. B. ; Modes and Natural Frequencies of  
Suspension Bridge Oscillation, J. Frank. Inst., vol. 3,  
p. 148, Sep., 1959.
- 4) 赤尾 ; トラストランガー桁の振動について, 第19回土木学会  
講演会前刷, I-33, 昭. 39.
- 5) E. Saibel; Vibration Frequencies of Continuous Beams,  
J. of Aero. Sci., vol. 11, p. 88, 1944.
- 6) Saibel ; Forced Vibrations of Continuous Beams, Proc.  
ASCE., Nov., 1951, Separate No. 100, p. 1.
- 7) Veletsos ; A Method for Calculating the Natural Frequen-  
cies of Continuous Beams, Frames, and certain Types  
of Plates, Univ. of Illinois, Doctorial Dissertation,  
Civil Eng. Department, 1953.

- 8) Veletsos and Newmark ; A Simple Approximation for the Fundamental Frequencies of Two-Span and Three-Span Continuous Beams, Proc. 3rd U.S. Nat. Congr. of Appl. Mech.
- 9) Veletsos and Newmark ; Determination of the Natural Frequencies of Continuous Beams on Flexible Supports, Proc. 2nd U.S. Nat. Congr. of Appl. Mech., 1954, p. 147.
- 10) 島田 ; バネ支承で支持された連続桁の性質について, 土木学会論文集, No. 51. 昭. 32, p. 51.
- 11) 島田 ; バネ支承で支持された連続桁の解法, 土木学会論文集, No. 55, 昭. 33. p. 57.
- 12) 平嶋 ; 多スパン桁の振動数方程式, 土木学会論文集, No. 58. 昭. 33, p. 102
- 13) Krieger ; Zur Statik und Kinetik der Trägerroste, Ing. Arch., Bd. 17, 1949, S. 391.
- 14) Bleich, H. ; Frequency Analysis of Beam and Girder Floors, Trans. ASCE., vol. 115, 1950, p. 1023.
- 15) Ewell and others ; Deflections in Gridworks and Slabs, Proc. ASCE, Sep., 1951, Separate No. 89, p. 1.



- 16) Veletsos and Newmark ; Determination of Natural Frequencies of Continuous Plates Hinged along Two Opposite Edges, J. Appl. Mech., vol. 23, 1956, p. 97.
- 17) 成岡, 平井 ; 合成格子桁橋の自由振動周期について, 土木学会論文集, No. 35, 1956, p. 25.
- 18) Ellington and McCallion ; The Free Vibrations of Grillages, J. Appl. Mech., vol. 26, 1959, p. 603.
- 19) 酒井 ; 微分方程式による多張向高戸ラーメンの振動解法並にその固有振動週期の実用算定公式, 土木学会誌, No. 4, 昭. 15.
- 20) Looney, C.T.G. ; Steady - State Forced Vibration of Continuous Frames, Proc. ASCE, vol. 78, June, 1952, Separate No. 136.
- 21) 川上 ; 防撓矩形板の強制振動, 広島大. 工. 研究報告, 3 巻 2 号, p. 281, 昭. 29.
- 22) 樋口 ; 防撓矩形板の自由振動について, 造船協会論文集, 88 巻, 昭. 30, p. 135.
- 23) Serbin ; Vibrations of Composite Structures, J. Aero. Sci., vol. 12, 1945, p. 108.

- 24) Lansing and Wehle ; A Method for Reducing Analysis of Complex Redundant Structures to a Routine Procedure, J. Aero. Sci., vol. 19, 1952, p. 677.
- 25) Chenea, P.F. ; On the Application of the Impedance Method to Continuous Systems, J. Appl. Mech., June, 1953, p. 233.
- 26) 吉村, 平井 ; ランガー桁の動的解析, 土木学会論文集, No. 101, p. 1, 昭. 39.
- 27) 平井 ; 結合法による格子構造の動的解析, 土木学会論文集, No. 101, p. 25, 昭. 39.
- 28) 平井 ; 結合法による弾性支承を有する連続ばりの動的解析, 土木学会論文集, No. 104, p. 1, 昭. 39.
- 29) 山崎 ; ランガー桁の固有周期について, 土木学会第14回講演会, 昭. 34. 5.
- 30) 吉村, 平井 ; 戸崎橋ランガー桁の振動試験と載荷試験, 土木技術, 昭. 38. 7.
- 31) 吉村 ; ランガーガードの固有振動について, 土木学会第13回講演会, 昭. 33. 5.
- 32) Rogers, G.L. ; Dynamics of Framed Structures, John Wiley & Sons, 1959, p. 263

33) 前出, 第2篇 6), p.49